

5 november 2012, 14:00 - 16:00 uur

Uit $y = 3 - \ln\left(\frac{4}{x}\right)$ volgt: $\ln\left(\frac{4}{x}\right) = 3 - y$ en dus: $\frac{4}{x} = e^{3-y}$ ofwel: $\frac{x}{4} = e^{y-3}$. Dus $x = 4 \cdot e^{y-3}$

Opgave 3 (2-5)

Een gedempte trilling wordt beschreven door de functie $x(t) = e^{-t} \cdot \cos(t)$.

Daarbij is x de uitwijking ten opzichte van de evenwichtsstand $x = 0$ en t de tijd ($t \geq 0$).

a. Bereken de tijdstippen waarop de evenwichtsstand wordt gepasseerd.

Er moet gelden: $x(t) = 0$, dus: $x(t) = e^{-t} \cdot \cos(t) = 0$ en dus $e^{-t} = 0$ of $\cos(t) = 0$

$e^{-t} = 0$ is onmogelijk, dus alleen $\cos(t) = 0$ blijft over. Dat is waar voor $t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$.

b. Bereken met behulp van de afgeleide de tijdstippen waarop de uitwijking maximaal is.

Uitwijking maximaal als $x'(t) = 0$, dus:

$x'(t) = -1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(t) + e^{-t} \cdot -\sin(t) = -e^{-t} \cdot (\cos(t) + \sin(t)) = 0$. Omdat $e^{-t} = 0$ onmogelijk is, blijft over: $\cos(t) + \sin(t) = 0$. Dit kan op verschillende manieren worden opgelost. Bijvoorbeeld als volgt:

$\cos(t) = -\sin(t) = \sin(-t)$. Omdat $\cos(t) = \sin(t + \frac{1}{2}\pi)$ volgt dus $\sin(t + \frac{1}{2}\pi) = \sin(-t)$ met als

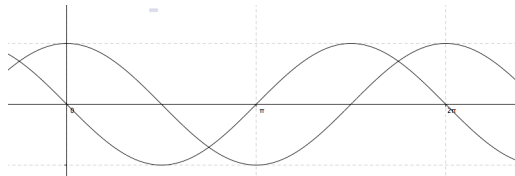
gevolg: $t + \frac{1}{2}\pi = -t + 2k\pi$ of $t + \frac{1}{2}\pi = \pi - (-t) + 2k\pi$

oplossingen zijn dus $2t = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ of $0 = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ en dus $t = -\frac{1}{4}\pi + k\pi$. Omdat t start bij $t = 0$,

zijn de oplossingen dus $t = \frac{3}{4}\pi + k\pi$

Een andere optie: teken de grafieken van $\cos(t)$ en $-\sin(t)$ en constateer dat ze snijden bij

$t = \frac{3}{4}\pi$ en $t = 1\frac{3}{4}\pi$ (Controleer met een berekening dat dit inderdaad klopt!)



Opgave 4 (3)

Welke rechthoeks-coördinaten (a, b) horen bij de poolcoördinaten $r = 5$ en $\varphi = -\frac{\pi}{3}$?

Advies: maak een schetsje: punt op afstand 5 van de oorsprong, 60 graden rechtsonder vanaf de positieve x-as. Voor a geldt dan: $a = 5 \cdot \cos(-60^\circ) = 2,5$. Voor b geldt $b = 5 \cdot \sin(-60^\circ) = -2,5 \cdot \sqrt{3}$

Opgave 5 (3-3)

a. Schrijf het complexe getal $z = 3 - i\sqrt{3}$ in de vorm $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

Weer een schetsje: vanuit $z = 0$ ga je 3 naar rechts en $\sqrt{3}$ naar beneden. De bijbehorende hoek is dan $\varphi = -\frac{1}{6}\pi$.

De afstand r van het punt tot $z = 0$ vind je met Pythagoras: $r = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Dus z is te schrijven als $z = 2\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{1}{6}\pi i}$

b. Schrijf de breuk $\frac{3-4i}{3+4i}$ in de vorm $a + bi$ met a en b beide reële getallen.

$$\frac{3-4i}{3+4i} = \frac{3-4i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{(3-4i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{9-16-24i}{9+16} = \frac{-7-24i}{25} = -\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i$$

Opgave 6 (4)

Gegeven is het stuk van de parabool $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ van $x = 1$ tot $x = 5$. Dit is de kromme C .

Bereken de lijnintegraal $\int_C (2x-2) ds$

Er geldt: $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{2}(x-1) = x-1$. Met de gegeven formule volgt dan:

$$ds = \sqrt{1 + (x-1)^2} dx = \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$$

Dus uit te rekenen de integraal [merk op dat $(2x-2)$ de afgeleide is van $(x^2 - 2x + 2)$]:

$$\int_C (2x-2) ds = \int_{x=1}^{x=5} (2x-2) \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx = \left[\frac{2}{3} (x^2 - 2x + 2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^5 = \frac{2}{3} \cdot 17\sqrt{17} - \frac{2}{3}$$

Opgave 7 (4)

Bereken de eerste vijf termen van de Taylorreeks die hoort bij $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Bereken $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ en $f^{(4)}(x)$. Dat worden: $f'(x) = (1-x)^{-2}$, $f''(x) = 2 \cdot (1-x)^{-3}$,

$f'''(x) = 6 \cdot (1-x)^{-4}$ en $f^{(4)}(x) = 24 \cdot (1-x)^{-5}$. Dus $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 6$ en $f^{(4)}(0) = 24$.

Invullen in de gegeven formule levert: $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

Opgave 8 (4)

Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{dx}{dt} = 2t \cdot (4-x)$ met randvoorwaarde $x(0) = 1$

Scheiding van variabelen levert: $\frac{1}{4-x} \frac{dx}{dt} = 2t$ en dus $\int \frac{1}{4-x} \frac{dx}{dt} dt = \int 2t dt$ met uitkomst

$$-\ln(4-x) = t^2 + c \Rightarrow 4-x = e^{-t^2-c} = d \cdot e^{-t^2} \text{ en dus } x = 4 - d \cdot e^{-t^2}.$$

De randvoorwaarde ($t = 0$ met $x = 1$) levert $d = 3$, dus de definitieve oplossing is $x = 4 - 3 \cdot e^{-t^2}$