

Uitwerking tentamen wiskunde 1B dd 28-01-2013

Opgave 1 (6)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 6xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x - 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 3y^2 - 9$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6x$$

Voor stationaire punten geldt $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 6xy = 0$ levert $x = 0$ of $y = 2x$

Bij $x = 0$ hoort $3y^2 - 9 = 0$ en dus $y = \sqrt{3}$ en $y = -\sqrt{3}$

Bij $y = 2x$ volgt: $-3x^2 + 12x^2 - 9 = 0$ en dus $x = 1$ en $x = -1$

Stationaire punten zijn dus $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$, $(1, 2)$ en $(-1, -2)$

punt	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$	aard
$(0, \sqrt{3})$	$-6\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	0	-108	zadelpunt
$(0, -\sqrt{3})$	$6\sqrt{3}$	$-6\sqrt{3}$	0	-108	zadelpunt
$(1, 2)$	12	12	-6	108	minimum
$(-1, -2)$	-12	-12	6	108	maximum

Opgave 2 (4)

$$\int_C [(x^2 + 2y)dx + (y^2 + x)dy] = \int_{t=0}^1 [(t^4 + 2t)2t dt + (t^2 + t^2)dt] = \int_{t=0}^1 (2t^5 + 6t^2) dt = \left[\frac{1}{3}t^6 + 2t^3 \right]_{t=0}^{t=1} = 2\frac{1}{3}$$

Opgave 3 (2 - 6)

a. $2 \leq r \leq 4$ en $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

b. Er geldt: $x = r \cos(t)$, $y = r \sin(t)$ en pas op!!! $dA = r \cdot dr d\varphi$

$$\begin{aligned} \iint_C 2xy dA &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=2}^4 2r \cos(\varphi) \cdot r \sin(\varphi) \cdot r dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \int_{r=2}^4 r^3 dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=2}^{r=4} 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = \\ &= 60 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\varphi) d\varphi = 30 \left[-\cos(2\varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 30 \cdot (\cos(0) - \cos(\pi)) = 30 \cdot (1 - (-1)) = 60 \end{aligned}$$

Opgave 4 (4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -10 & 14 \\ 0 & 1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dus: $x = -1$, $y = 2$ en $z = -1$

Opgave 5 (4 - 4)

- a. Voor oneindig veel oplossingen geldt: $\det(\text{matrix}) = 0$. Het geval 'geen oplossingen' is niet aan de orde omdat de nulvector al een oplossing is. Dus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot (\lambda + 2) - \lambda(\lambda - 0) + 0(-1 - 0) = -\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \text{ met oplossingen } \lambda = -1 \text{ en } \lambda = 2$$

- b. Bepaal alle oplossingen van het stelsel voor $\lambda = -1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ en dus } x + y = 0 \text{ en } 2y - z = 0. \text{ Als je stelt } y = t \text{ dan zijn dus}$$

$$\text{alle oplossingen te schrijven als } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Opgave 6 (4 - 4)

- a. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot -2 = -5$ Ook geldt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \varphi = 10 \cdot \cos \varphi$

$$\text{Dus: } \cos \varphi = -\frac{1}{2} \text{ en dus } \varphi = \frac{2}{3}\pi$$

- b. Gebruik de nul in vector $\vec{a}$. Elke vector $\begin{pmatrix} 3 \\ p \\ -1 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op $\vec{a}$. Loodrecht op $\vec{b}$

$$\text{betekent } \begin{pmatrix} 3 \\ p \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix} = 3 + p\sqrt{5} + 2 = 0 \text{ en dus } p = -\sqrt{5}. \text{ Dus } \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ voldoet.}$$

Opgave 7 (4 - 4)

- a. Uit de beschrijving van de matrix blijkt dat de y -as zichzelf blijft. Voor x en z geldt dat er een rotatie is (met de y -as als rotatie-as) over een hoek φ met $\cos \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$.

De rotatiehoek is dus $\varphi = -\frac{1}{6}\pi$

- b. Matrix A is orthogonaal (de kolomvectoren hebben lengte 1 en staan loodrecht op elkaar), dus geldt $A^{-1} = A^T$

$$\text{Dus } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$