

Tentamen wiskunde voor chemici 1

4 november 2014, 11:00 - 13:00 uur

Opgave 1 (4 - 2 - 3 - 3)

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 6x}{x+1}$. De functie is te herschrijven tot $f(x) = x^2 - 6 + \frac{6}{x+1}$

a. Toon aan dat de twee gegeven schrijfwijzen voor f gelijkwaardig zijn.

$$\frac{x^3 + x^2 - 6x}{x+1} = \frac{x^2(x+1) - 6x}{x+1} = \frac{x^2(x+1) - 6(x+1) + 6}{x+1} = x^2 - 6 + \frac{6}{x+1} \text{ of met:}$$

$$(x^2 - 6 + \frac{6}{x+1}) \cdot (x+1) = x^2 \cdot (x+1) - 6 \cdot (x+1) + 6 = x^3 + x^2 - 6x - 6 + 6 = x^3 + x^2 - 6x$$

b. Bereken de nulpunten van f , dus de snijpunten van de grafiek met de x -as.

$$x^3 + x^2 - 6x = 0 \text{ en } x \neq -1 \text{ levert op:}$$

c. Bereken de waarden van x waarvoor de grafiek *onder* de x -as ligt.

De teller is een derdegraads vorm die negatief begint en positief eindigt. Tussen -3 en 0 wordt hij positief en tussen 0 en 2 is hij negatief.

De noemer verandert van teken bij $x = -1$ (van negatief naar positief); -1 zelf mag niet omdat $x + 1$ in de noemer staat (verticale asymptoot!).

Onder andere met behulp van tekenschema's voor teller en noemer vind je dus:

$$f(x) < 0 \text{ voor } -3 < x < -1 \text{ en voor } 0 < x < 2$$

d. Bereken de oppervlakte van het deel van de grafiek van f dat *onder* de x -as ligt voor $x \geq 0$

$$\int_{x=0}^2 (x^2 - 6 + \frac{6}{x+1}) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 6x + 6 \cdot \ln(x+1) \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 12 + 6 \cdot \ln(3)$$

Deze uitkomst is negatief, dus de oppervlakte is $9\frac{1}{3} - 6 \cdot \ln(3)$

Opgave 2 (3)

Welke poolcoördinaten (r, φ) horen bij de Cartesische coördinaten $(5, -5)$?

Met een plaatje ter ondersteuning: $(5, -5)$ ligt in het vierde kwadrant, dus de hoek is $\varphi = -\frac{1}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi$.

De afstand tot de oorsprong: $r^2 = 5^2 + (-5)^2 = 50$ en dus $r = 5\sqrt{2}$

Opgave 3 (3 - 5 - 4)

Gegeven is de functie $f(x) = \cos(x) + \cos(2x)$, met $-\pi \leq x \leq \pi$.

a. Bereken de nulpunten van f op het interval $[-\pi, \pi]$.

$$\cos(x) + \cos(2x) = \cos(x) + 2\cos^2(x) - 1 = 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = (2\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1) = 0$$

Dus: $\cos(x) = \frac{1}{2}$ of $\cos(x) = -1 \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3}$ of $x = \pm \pi$

- b. Bereken de waarden van x waarvoor de functie een extreme waarde bereikt op het interval $[-\pi, \pi]$.

$$f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(2x) = -\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) = -\sin(x) \cdot (1 + 4\cos(x))$$

Dus $f'(x) = 0$ voor $\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = -\frac{1}{4}$ met oplossingen: $x = -\pi, 0, \pi$ en $x \approx \pm 1,82 \approx 0,58\pi$

- c. Bereken de gemiddelde functiewaarde van f op het interval $[0, \pi]$.

$$\frac{\int_0^\pi (\cos(x) + \cos(2x)) \, dx}{\pi} = \frac{\left[\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) \right]_0^\pi}{\pi} = 0$$

Opgave 4 (4 - 3)

- a. Gegeven is een complex getal z met $|z| = \sqrt{3}$ en $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$. Bereken z^9 en schrijf de uitkomst daarvan in de vorm $a + bi$.

$$z = \sqrt{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} \text{ en dus } z^9 = 9\sqrt{3} \cdot e^{i \cdot 3\pi} = 9\sqrt{3} \cdot -1 = -9\sqrt{3}$$

- b. Schrijf de breuk $\frac{5-3i}{5+12i}$ in de vorm $a + bi$ met a en b beide reële getallen.

$$\frac{5-3i}{5+12i} = \frac{5-3i}{5+12i} \cdot \frac{5-12i}{5-12i} = \frac{25-36-75i}{25+144} = \frac{-11-75i}{169} = -\frac{11}{169} - \frac{75}{169}i$$

Opgave 5 (4 - 3)

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

- a. Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6; |\vec{a}| = 2\sqrt{3}; |\vec{b}| = \sqrt{6} \text{ dus } \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{6}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ en dus } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

- b. Bepaal een vector $\vec{c}$ die loodrecht staat op $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

$$\text{Inproduct met beide vectoren moet nul zijn. Mogelijke vector: } \vec{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Opgave 6 (4)

Bereken de onbepaalde integraal $\int (1-x)^3 \cdot \ln(x-1) \, dx$

Noem $(x-1)$ even t . Dan wordt de integraal:

$$\int -t^3 \cdot \ln(t) \, dt = -\frac{1}{4}t^4 \cdot \ln(t) - \int -\frac{1}{4}t^4 \cdot \frac{1}{t} \, dt = -\frac{1}{4}t^4 \cdot \ln(t) + \frac{1}{4} \int t^3 \, dt = -\frac{1}{4}t^4 \cdot \ln(t) + \frac{1}{16}t^4 + c$$

Dus het antwoord is: $-\frac{1}{4}(x-1)^4 \cdot \ln(x-1) + \frac{1}{16}(x-1)^4 + c$

Opgave 7 (5)

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = (x-1)^2 \cdot y$

Bereken de vergelijking van de oplossingskromme die door het punt (2, 3) gaat.

$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = (x-1)^2$ en dus $\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int (x-1)^2 dx$. Daaruit volgt:

$$\ln y = \frac{1}{3}(x-1)^3 + c \rightarrow y = e^{\frac{1}{3}(x-1)^3 + c} = e^c \cdot e^{\frac{1}{3}(x-1)^3} = d \cdot e^{\frac{1}{3}(x-1)^3}$$

$x = 2$ en $y = 3$ invullen levert: $3 = d \cdot e^{\frac{1}{3}}$ en dus $d = 3 \cdot e^{-\frac{1}{3}}$

De oplossingskromme heeft dus als vergelijking: $y = 3 \cdot e^{\frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{3}}$