

Uitwerking Tentamen wiskunde 2 voor chemici

26 januari 2015, 17 - 19 uur

Opgave 1 (6)

Gegeven is de functie $f(x, y) = 2x^2y + xy + \frac{2}{3}y^3$

Bepaal de stationaire punten van f en onderzoek de aard (maximum, minimum, zadelpunt).

Uitwerking:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + y \text{ en } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y \text{ en } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4x + 1 \quad \text{dus} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + y = 0 \text{ geeft } y = 0 \text{ en } x = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + x + 2y^2 \text{ en } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4y \text{ en } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x + 1$$

$$y = 0 \text{ invullen in } \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + x + 2y^2 = 0 \text{ geeft } 2x^2 + x = 0 \text{ en dus } x = 0 \text{ en } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Voor } x = -\frac{1}{4} \text{ volgt } \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 2y^2 = 0 \text{ en dus } y = \pm \frac{1}{4}$$

Stationaire punten vind je dus bij $(0, 0)$; $(-\frac{1}{2}, 0)$; $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ en $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$

$f_x = 0$ en $f_y = 0$	f_{xx} en f_{yy}	$f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$	aard
$(0, 0)$	0 en 0	-1	zadel
$(-\frac{1}{2}, 0)$	0 en 0	-1	zadel
$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	1 en 1	1	min
$(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	-1 en -1	1	max

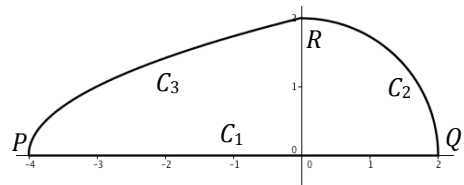
Opgave 2 (7)

Gegeven is de gesloten kromme C die bestaat uit drie delen (zie figuur hiernaast):

C_1 is het stuk van de x-as van $P(-4, 0)$ tot aan $Q(2, 0)$;

C_2 is de kwart cirkel van $Q(2, 0)$ naar $R(0, 2)$;

C_3 is het deel van de liggende parabool $x = y^2 - 4$ voor $0 \leq y \leq 2$



De gehele kromme C wordt doorlopen door eerst van P naar Q te gaan over de x -as; vervolgens van Q naar R over de kwart cirkel en tenslotte van R terug naar P over de parabool.

Bereken de kringintegraal $\oint_C [(x+y)dx - (y+x)dy]$

Uitwerking:

Op C_1 geldt $y = 0$ en $dy = 0$ dus: $\int_{C_1} [(x+y)dx - (y+x)dy] = \int_{-4}^2 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-4}^2 = 2 - 8 = -6$

Op C_2 werken met poolcoördinaten: $x = 2\cos(t)$ en $y = 2\sin(t)$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} [(x+y)dx - (y+x)dy] &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + 2\sin t)(-2\sin t dt) - (2\sin t + 2\cos t)(2\cos t dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-8\sin t \cos t - 4\} dt = \left[-4\sin^2 t - 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -4 - 4\pi \end{aligned}$$

Op C_3 :

$$\begin{aligned} \int_{y=2}^0 (x+y)dx - (y+x)dy &= \int_{y=2}^0 (y^2 - 4 + y) \cdot 2y dy - (y + y^2 - 4)dy = \\ \int_{y=2}^0 (2y^3 + y^2 - 9y + 4)dy &= \left[\frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{9}{2}y^2 + 4y \right]_2^0 = -(8 + \frac{8}{3} - 18 + 8) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Totaal: $\oint_C [(x+y)dx - (y+x)dy] = -6 - 4 - 4\pi - \frac{2}{3} = -10\frac{2}{3} - 4\pi$

Opgave 3 (2 - 4)

Deze opgave gaat over de dubbele integraal $\iint_G e^{x^2+y^2} dA = \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy$

a. Het gebied G waarover wordt geïntegreerd kun je afleiden uit de integratiegrenzen van de integraal. Welke vorm heeft dat gebied? Geef ook een schetsje van G .

b. Bereken de dubbele integraal $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy$

hint: gebruik poolcoördinaten bij het uitrekenen van de dubbele integraal.

Uitwerking:

a. G is de rechter halve cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 2

b. Met $x = r \cdot \cos t$ en $y = r \cdot \sin t$ volgt dan:

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy = \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^2 e^{r^2} \cdot r \cdot dr dt = \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^2 dt = \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} \right\} dt = \left(\frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} \right) \cdot \pi$$

Opgave 4 (4)

Bepaal de inverse van matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Uitwerking:

Met Gauss eliminatie vind je $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -10 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

Opgave 5 (2-2)

Gegeven is de reactievergelijking: $a \cdot \text{FeCl}_2 + b \cdot \text{Na}_3(\text{PO}_4) \rightarrow c \cdot \text{Fe}_3(\text{PO}_4)_2 + d \cdot \text{NaCl}$

Met deze reactievergelijking is een stelsel van vier vergelijkingen met vier onbekenden (a , b , c en d) op te stellen, door afzonderlijk te kijken naar de vereiste hoeveelheden Fe, Cl, Na en PO_4

a. Bepaal het stelsel vergelijkingen.

b. Los het stelsel vergelijkingen op.

Uitwerking:

a.

Voor Fe: $a = 3c$

Voor Cl: $2a = d$

Voor Na: $3b = d$

Voor PO_4 : $b = 2c$

b. Via oplossen van het stelsel, of gewoon via substitutie, volgt: $(a, b, c, d) = (3, 2, 1, 6)$

Opgave 6 (4 - 3)

Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

a. Bereken de eigenwaarden λ van deze matrix.

Eén van de eigenwaarden is $\lambda = 3$ (voor het geval je die niet hebt gevonden bij **a.**)

b. Bereken de eigenvector bij deze eigenwaarde.

Uitwerking:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \{(2-\lambda) \cdot (-1-\lambda) - 4\} = (1-\lambda) \cdot \{\lambda^2 - \lambda - 6\} = (1-\lambda) \cdot (\lambda+2) \cdot (\lambda-3)$$

De eigenwaarden zijn dus 1, -2 en 3

b. Voor $\lambda = 3$ krijg je dus: $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ met oplossing $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Opgave 7 (2-4)

In $\mathbf{R}_3$ worden twee afbeeldingen (eerst A en dan B) na elkaar uitgevoerd. De matrix C die hoort bij deze achtereenvolgende afbeeldingen ($C = B \cdot A$) is:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Wat is de beeldvector $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ van $\vec{x} = C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. Welke afbeeldingen A en B zijn gebruikt? Beschrijf de afbeeldingen (rotatie over ... om de as ... en/of spiegeling in ...) of geef de matrices die horen bij A en B .

Uitwerking:

a. $C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b. Een mogelijke optie is:
eerst een rotatie om de z-as over 90° en daarna spiegelen in $z = x$