

Uitwerkingen Tentamen Natuurkunde-1

5 november 2015

Patrick Baesjou

Vraag 1 [17]:

- a. Voor de veerconstante moeten we de hoekfrequentie ω weten.

Die wordt gegeven door: $\omega = 2\pi f$ ($= 62.8 \text{ s}^{-1}$)

Vervolgens geldt dat: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = \omega^2 \cdot m = (2\pi f)^2 \cdot m$

$$\Rightarrow k = (2\pi \cdot 10)^2 \cdot 0.25 = 986.96 = 987 \text{ N/m}$$

- b. De amplitude kunnen we berekenen uit de maximale snelheid, en die kunnen we weer berekenen uit de verplaatsing.

Algemeen geldt voor een trilling dat: $x = A \cos(\omega t + \phi)$

$$\text{Dus: } v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\text{en: } v_{\max} = A\omega \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{9}{62.8} = 0.14 \text{ m}$$

Alternatief: via energiebehoud.

De kinetische energie is maximaal als $v = v_{\max}$ (als de massa door de evenwichtspositie beweegt, dus $x = 0$). De potentiële energie is maximaal bij maximale uitslag: $x = A$.

Aangezien de mechanische energie in het systeem niet verandert ($\Delta E = 0$) geldt dat: $\Delta K = \Delta U$ of $K_{\max} = U_{\max}$ (als we de juiste aftelpunten nemen).

$$\text{Dus: } \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{m}{k}v_{\max}^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{k}v_{\max}^2} = \sqrt{\frac{v_{\max}^2}{\omega^2}} = \frac{v_{\max}}{\omega}$$

- c. De versnelling kun je bereken door de tweede afgeleide van de verplaatsing te

$$\text{nemen: } a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

$$\text{Hieruit kunnen we zien dat } a_{\max} = A\omega^2 = 0.143(62.8)^2 = 564.54 = 565 \text{ m/s}^2$$

Door de formule te schrijven als $a = -\omega^2 x$ kunnen we onmiddellijk zien dat de (absolute waarde van de) maximale versnelling bereikt wordt als $x = A$, dus bij de maximale uitslag (dus als $v=0 \text{ m/s}$).

Vraag 2 [18]:

Dit is een geval van twee keer impulsbehoud, waarin we Anne en Bob en hun interactie met de bal als twee aparte gebeurtenissen moeten beschouwen, en dus apart moeten oplossen.

In feite hebben we hier twee keer het equivalent van een inelastische botsing, en voor beide geldt: $\Delta \vec{P} = 0$

In beide gevallen geldt dus: $\sum_k m_k v_{k,initial} = \sum_k m_k v_{k,final}$

Voor Bob geldt:

- $$m_{tot,i} v_{bob,i} = (m_{bob} + m_{slee}) v_{bob,f} + m_{bal} v_{bal}$$
$$\Rightarrow (m_{bob} + m_{slee} + m_{bal}) v_{bob,i} = (m_{bob} + m_{slee}) v_{bob,f} + m_{bal} v_{bal}$$
$$\Rightarrow v_{bob,f} = \frac{(m_{bob} + m_{slee} + m_{bal}) v_{bob,i} - m_{bal} v_{bal}}{(m_{bob} + m_{slee})}$$

Invullen geeft:

$$\Rightarrow v_{bob,f} = \frac{(85+15+8) \cdot 3 - 8 \cdot 7}{(85+15)} = 2.68 \text{ m/s [1]}$$

Voor Anne geldt:

- $$(m_{anne} + m_{slee}) v_{anne,i} + m_{bal} v_{bal} = (m_{anne} + m_{slee} + m_{bal}) v_{anne,f}$$
$$\Rightarrow v_{anne,f} = \frac{(m_{anne} + m_{slee}) v_{anne,i} + m_{bal} v_{bal}}{(m_{anne} + m_{slee} + m_{bal})} = \frac{(65+15) \cdot 2 + 8 \cdot 7}{(65+15+8)} = 2.45 \text{ m/s}$$

Bob glijdt na afloop dus nog steeds sneller dan Anne, en ze zullen dus nog steeds botsen (zij het iets minder hard).

Vraag 3 [25]:

- a. voor deze vraag weten we de de hoek waaronder het pakketje wordt afgeschoten (60°) en de afstand tussen begin- en eindpunt ($\Delta x = 300\text{m}$, $\Delta y = 200\text{m}$).

De oorsprong moet nog even gekozen worden, en het handigste is om die op het startpunt neer te leggen, zodat $x_0 = 0$ en $y_0 = 0$.

Het pakketje beschrijft een kogelbaan: er is maar één versnelling (g) en die werkt alleen verticaal (y -richting).

Voor de bewegingformules kunnen we nu opschrijven:

$$x(t) = v_{0,x} t = v_0 t \cos \Theta$$

$$y(t) = v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t \sin \Theta - \frac{1}{2} g t^2$$

probleem is dat we de tijd niet weten, maar deze kunnen we uit de formules elimineren door te schrijven:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \Theta}$$

en dit te substitueren in de formule voor $y(t)$:

$$y(x) = v_0 \sin \Theta \left(\frac{x}{v_0 \cos \Theta} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \Theta} \right)^2 = x \tan \Theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \Theta}$$

$$\text{dit kunnen we nog verder uitwerken tot: } v_0 = \sqrt{\frac{g x^2}{2 \cos^2 \Theta (x \tan \Theta - y)}}$$

maar dat hoeft niet per se – in principe kun je met de formule voor $y=f(x)$ al op een waarde voor v_0 komen door de bekende getallen in de vullen:

$$200 = 300 \cdot \tan 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \frac{(300)^2}{v_0^2 \cos^2 60^\circ} = 519.62 - 4.9 \frac{90000}{v_0^2 (0.5)^2}$$

$$200 - 519.62 = \frac{-441000}{0.25 v_0^2}$$

$$v_0^2 = \frac{-441000}{-79.91} = 5518.71$$

$$\Rightarrow v_0 = 74.3 \text{ m/s}$$

invullen in de formule van $v_0 = \dots$ geeft uiteraard hetzelfde resultaat

- b. Hier hebben we energiebehoud (van mechanische energie): de potentiële energie in de katapult wordt volledig omgezet in kinetische energie:

$$U_{\text{veer}} = K$$

dus:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

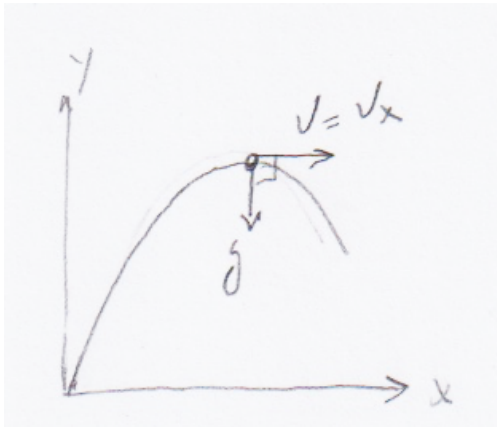
NB: we gebruiken een x in deze formule omdat het een uitrekking in 1 richting is, maar het is niet dezelfde x als in vraag a.

oplossen voor x geeft:

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} = \sqrt{\frac{5 \cdot (74.3)^2}{140000}} = 0.44 \text{ m}$$

(voor $v_0 = 40 \text{ m/s}$ is het antwoord 0.24 m)

- c. De richting van de snelheid is die van de raaklijn aan de parabolische baan. Op het hoogste punt is die richting horizontaal: de snelheid in de y -richting is 0, alleen de x -component is over. De enige versnelling is de zwaartekrachtversnelling, en die werkt alleen verticaal (in de y -richting). Op het hoogste punt staan de snelheid en versnelling dus loodrecht op elkaar.



Snelheid en versnelling parallel? Omdat de versnelling verticaal gericht is, moet hiervoor dus de snelheid ook puur verticaal gericht zijn.

Hiervoor zou de x -component van de snelheid dus 0 moeten zijn.

We weten echter uit vraag a dat:

$$v_x = v_0 \cos \Theta \quad \text{en dit is een constante, niet gelijk aan 0.}$$

Er is dus in principe nergens een moment dat de snelheid en versnelling parallel zijn. Sommigen merkten echter niet geheel onterecht op dat tijdens het afschieten zelf de snelheid en versnelling parallel zijn. Dat is eigenlijk geen onderdeel van de kogelbaan, maar hebben we ook goedgerekend.

Vraag 4 [20]:

Dit is het rotatie-equivalent van een inelastische botsing, en er geldt dus behoud van impulsmoment

Omdat de draaischijf en Bob tot stilstand zijn gekomen nadat Bob er op is gesprongen, is het impulsmoment na de botsing dus 0, en moet de som van impulsmomenten ervoor dus ook 0 zijn:

$$\vec{L}_{schijf} + \vec{L}_{bob} = \vec{L}_{schijf+bob} = 0$$

$$\text{en dus: } \vec{L}_{schijf} = -\vec{L}_{bob}$$

Nu kunnen we voor de respectievelijke impulsmomenten schrijven:

$$\vec{L}_{schijf} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{L}_{bob} = \vec{r} \times \vec{p} = r \cdot p \cdot \sin\phi$$

$$\text{met } \phi=90^\circ \text{ geeft dit: } \vec{L}_{bob} = rm_{bob}v_{bob}$$

$$\text{dus: } r = -\frac{I\vec{\omega}}{m_{bob}v_{bob}}$$

Nu moeten we de losse componenten nog even uitwerken:

Impulsmoment draaischijf:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 2^2 = 300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

de hoeksnelheid halen we uit de rotatiesnelheid:

$$18 \text{ omw/min} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{18 \cdot 2\pi}{60} = -1.885 \text{ rad/s}$$

Het min-teken volgt uit de rechterhandregel, de schijf draait met de klok mee. Het impulsmoment van de schijf is dus ook negatief

$$\text{De snelheid van Bob halen we uit zijn versnelling: } v_{bob} = at = 4 \cdot 1.25 = 5 \text{ m/s}$$

Het impulsmoment van Bob is positief van teken, want zijn snelheid zou resulteren in een rotatie tegen de klok in. Dit volgde ook al uit de hoek van 90° .

Sommigen hebben ook voor Bob een $L=I\omega$ berekening gemaakt en dat is in principe ook correct. Het traagheidsmoment is dan $m_{bob}r^2$ en $\omega=v_{bob}/r$. Per saldo komt dat op hetzelfde neer.

Invullen geeft:

$$r = -\frac{I\vec{\omega}}{m_{bob}v_{bob}} = -\frac{300 \cdot -1.885}{85 \cdot 5} = 1.33 \text{ m}$$

Vraag 5 [20]:

a) Zie de krachtenplaatjes.

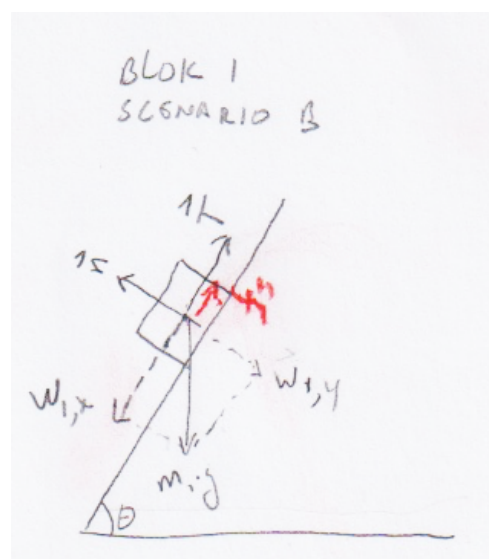
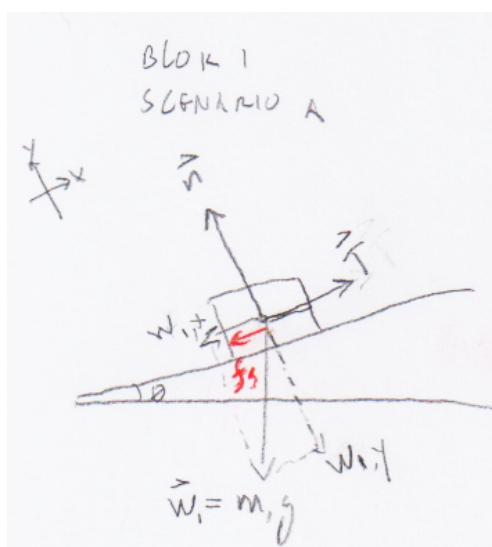
Kies een assenstelsel met x parallel aan de helling.

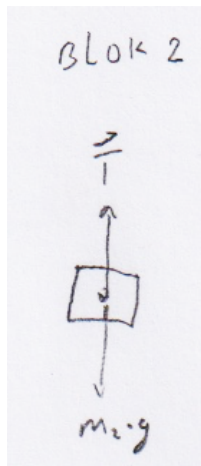
Op blok 2 werken de zwaartekracht en de spankracht T in het touw. Omdat het geheel niet beweegt geldt dat $T = m_2 g$.

Op blok 1 werken de zwaartekracht ($w_1 = m_1 g$), die ontbonden kan worden in een component langs de helling ($w_{1,x}$) en een component loodrecht er op ($w_{1,y}$) (deze laatste geeft aanleiding tot de normaalkracht n op het blok), de spankracht T in het touw en de statische wrijvingskracht f_s . Er zijn nu twee mogelijke scenarios waarbij blok 1 (en dus blok 2) nog net niet beweegt:

- bij kleine hellingshoek is de component van de zwaartekracht op blok 1 langs de helling ($w_{1,x}$) kleiner dan de spankracht T , en dreigt blok 1 dus door de spankracht omhoog de helling op getrokken te worden. Dit kan net worden voorkomen als de maximale statische wrijvingskracht samen met $w_{1,x}$ de spankracht precies tegenwerkt
- bij grote hellingshoek is de component van de zwaartekracht op blok 1 langs de helling ($w_{1,x}$) groter dan de spankracht T , en dreigt blok 1 dus langs de helling naar beneden te glijden. Dit kan net worden voorkomen als de maximale statische wrijvingskracht tegengesteld is aan $w_{1,x}$ (en dus 'meewerkt' met de spankracht).

Het cruciale verschil is dus dat de wrijvingskracht f_s tegengesteld gericht is in de twee situaties.





- b) Omdat de blokken niet bewegen geldt dat de netto kracht op beide blokken nul is. Bij de grootste van de twee hoeken uit vraag a) geldt nu voor blok 1:

$$T - w_{1,x} + f_{s,\max} = F_{\text{net}} = 0$$

met:

spankracht: $T = m_2 g$

component zwaartekracht langs helling: $w_{1,x} = m_1 g \sin \Theta$

wrijvingskracht: $f_{s,\max} = \mu_s n = \mu_s m_1 g \cos \Theta$

geeft dit:

$$m_2 g - m_1 g \sin \Theta + \mu_s g \cos \Theta = 0$$

$$\Rightarrow m_1 g \sin \Theta - \mu_s m_1 g \cos \Theta = m_2 g$$

$$\Rightarrow m_1 (\sin \Theta - \mu_s \cos \Theta) = m_2$$

$$\Rightarrow \sin \Theta - \mu_s \cos \Theta = \frac{m_2}{m_1}$$