

1. Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ en $\mathbf{w} = (1, 2, 2)$.

- (a) Bereken de hoek tussen $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$.

Aan de ene kant is $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (1, 0, 1) \cdot (1, 2, 2) = 3$. Aan de andere kant is $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \theta$, en $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, en $|\mathbf{w}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$. Dus $3 = 3\sqrt{2} \cos \theta \implies \cos \theta = 1/\sqrt{2} \implies \theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

- (b) Bepaal een vector met lengte 1 en dezelfde richting als $\mathbf{w}$.

$$\mathbf{w}/|\mathbf{w}| = (1, 2, 2)/3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

- (c) Bepaal een getal x zo dat $(x, -1, 2)$ loodrecht staat op $\mathbf{w}$.

$$\mathbf{w} \cdot (x, -1, 2) = x - 2 + 4 = 0 \implies x = -2.$$

2. Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - \ln|x|$.

- (a) Bepaal de x -waarden die hoort bij de lokale extreme waarden van $f(x)$.

Bij elke waarde, bepaal ook of het een lokale maximum of minimum is.

$f' = 4x - 1/x$, $f'' = 4 + 1/x^2$. $f' = 0 \implies 4x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm \frac{1}{2}$. $f''(\pm \frac{1}{2}) = 8 > 0$, dus $x = \frac{1}{2}$ en $x = -\frac{1}{2}$ zijn allebei lokale minima.

- (b) Is $f(x)$ een even functie, een oneven functie, of geen van beide?

$f(x)$ is een even functie want $f(-x) = 2(-x)^2 - \ln|-x| = 2x^2 - \ln|x| = f(x)$.

3. Gegeven is de functie $f(x) = (\sin(\sqrt{x}))^2$.

- (a) Bereken de afgeleide $\frac{df}{dx}$.

Twee keer kettingregel toepassen: $f' = ((\sin(\sqrt{x}))^2)' = 2(\sin(\sqrt{x}))(\sin(\sqrt{x}))' = 2(\sin(\sqrt{x}))\cos(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = 2(\sin(\sqrt{x}))\cos(\sqrt{x})(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) = \sin(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})/\sqrt{x}$.

- (b) Bepaal een functie $f^{-1}(x)$ zo dat $f(f^{-1}(x)) = x$. (Dus een inverse functie.)

$y = (\sin(\sqrt{x}))^2 \implies \pm\sqrt{y} = \sin(\sqrt{x}) \implies \arcsin(\pm\sqrt{y}) = \sqrt{x} \implies x = (\arcsin(\pm\sqrt{y}))^2$. Dus $f^{-1}(x) = (\arcsin(\sqrt{x}))^2$. (“ $\pm$ ” maakt bij het eindaantwoord niet uit.)

4. (a) Bereken de integraal $\int x \sin(x^2) dx$.

Substitueer $u = x^2$. Dan is $du/dx = 2x \implies dx = du/2x$. Dus $\int x \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \sin(u) du = -\frac{1}{2} \cos(u) + C = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C$.

- (b) Bereken de integraal $\int x e^{2x} dx$.

Partieel integreren ($\int f g' = f g - \int f' g$) met $f = x$ en $g' = e^{2x}$ betekent $f' = 1$ en $g = \frac{e^{2x}}{2}$ en dus $\int x e^{2x} dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = (\frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{2x} + C$.

5. (a) Bereken $(1 - i)^{12}$.

Voor $1 - i$ in polair form is $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Dus voor $(1 - i)^{12}$ is $r = (\sqrt{2})^{12} = 2^6 = 64$, $\theta = -\frac{\pi}{4} \cdot 12 = -3\pi$, wat equivalent is aan $-\pi$. Dus $(1 - i)^{12} = -64$.

(b) Schrijf $\frac{e^{\pi i}}{1-i}$ in de vorm $a + bi$ met a en b beide reële getallen.

$e^{\pi i}$ betekent een complexe getal met $r = 1$ en $\theta = \pi$, dus $e^{\pi i} = -1$. Dus

$$\frac{e^{\pi i}}{1-i} = \frac{-1}{1-i} = \frac{-1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-1-i}{1+2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

6. Bepaal de oplossing $y(x)$ van de differentiaalvergelijking

$$1 + x = 2xyy'$$

met randvoorwaarde $y(1) = 2$.

Schrijf $y' = dy/dx$ en gebruik scheiding van variabelen. $1 + x = 2xyy' \implies (\frac{1}{x} + 1)dx = 2ydy \implies \ln|x| + x = y^2 + C$. Invullen randvoorwaarde $x = 1$, $y = 2$ geeft $\ln|1| + 1 = 2^2 + C \implies C = -3$. Dus $y(x) = \pm\sqrt{3 + x + \ln|x|}$.

7. Bereken de integraal

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

met hulp van een machtreeks. Geef in je antwoord de eerste vier termen die geen nul zijn.

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \implies e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots$. Dus $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots dx = [x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \dots$.
