

1. Gegeven is een gesloten kromme C die bestaat uit drie delen:

C_1 is het stuk van de parabool $y = 1 - x^2$ van $(1, 0)$ naar $(0, 1)$.

C_2 is het lijnstuk van $(0, 1)$ naar $(-1, 0)$.

C_3 is het stuk van de x -as van $(-1, 0)$ tot aan $(1, 0)$.

De gehele kromme C wordt doorlopen door eerst C_1 , dan C_2 , dan C_3 te volgen.

Bereken de kringintegraal $\int_C (1 - y)dx + xdy$.

Langs C_1 is $y = 1 - x^2 \Rightarrow dy = -2xdx$, dus $\int_{C_1} (1 - y)dx + xdy = \int_{C_1} x^2 dx + x(-2xdx) = \int_1^0 -x^2 dx = [-x^3/3]_1^0 = 1/3$.

Langs C_2 is $y = 1 + x \Rightarrow dy = dx$, dus $\int_{C_2} (1 - y)dx + xdy = \int_{C_2} -xdx + xdx = 0$.

Langs C_3 is $y = 0$ en $dy = 0$, dus $\int_{C_3} (1 - y)dx + xdy = \int_{C_3} dx = [x]_{-1}^1 = 2$.

Dus $\int_C (1 - y)dx + xdy = 1/3 + 0 + 2 = 7/3$.

2. Gegeven is de functie $f(x, y) = xye^{x-y}$. Bepaal de stationaire punten van $f(x, y)$ en onderzoek de aard (maximum, minimum, zadelpunt).

Voor het gemak, laat $E = e^{x-y}$. Merk op dat $E > 0$.

$f_x = yE + xyE = 0 \Rightarrow y + xy = 0 \Rightarrow y = 0$ of $x = -1$.

$f_y = xE - xyE = 0 \Rightarrow x - xy = 0 \Rightarrow x = 0$ of $y = 1$.

Dus de stationaire punten zijn $(-1, 1)$ en $(0, 0)$.

$f_{xx} = 2yE + xyE$, $f_{yy} = -2xE + xyE$, en $f_{xy} = E - yE + xE - xyE$.

$(x, y) = (-1, 1) \Rightarrow f_{xx} = E > 0$, $f_{yy} = E > 0$, $f_{xy} = 0$, dus minimum.

$(x, y) = (0, 0) \Rightarrow f_{xx} = 0$, $f_{yy} = 0$, $f_{xy} = E \Rightarrow f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = -E^2 < 0$, dus zadelpunt.

3. Gegeven is de functie $f(x, y) = 5x^2 - 2y^2 + 10$. Bepaal de maxima en minima van $f(x, y)$ onder de voorwaarde $x^2 + y^2 = 1$.

De Lagrange-vergelijkingen zijn:

$$g = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$f_x = \lambda g_x \Leftrightarrow 10x = 2\lambda x \Rightarrow \lambda = 5 \text{ of } x = 0$$

$$f_y = \lambda g_y \Leftrightarrow -4y = 2\lambda y \Rightarrow \lambda = -2 \text{ of } y = 0$$

Dus de stationaire punten zijn $(\pm 1, 0)$ en $(0, \pm 1)$.

$f(\pm 1, 0) = 15$ en $f(0, \pm 1) = 8$, dus $(\pm 1, 0)$ zijn maxima en $(0, \pm 1)$ minima.

4. G is het gebied in het platte vlak dat wordt begrensd door de voorwaarden $x^2 + y^2 < 1$, $x > 0$, en $y < 0$.

- (a) Welke grenswaarden voor de poolcoördinaten r en θ gelden bij het gegeven gebied G ?
 $0 < r \leq 1$ en $-\pi/2 < \theta < 0$.
- (b) Bereken $\iint_G 2xy^2 dx dy$.

$$\begin{aligned}\iint_G 2xy^2 dx dy &= 2 \int_{-\pi/2}^0 \int_0^1 r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta = 2 \int_{-\pi/2}^0 [r^5/5]_0^1 \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{5} \int_{-\pi/2}^0 \cos \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{2}{5} \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{-\pi/2}^0 = \frac{2}{5} \left(-\frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

5. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{array}{rrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & y & + & az & = & a \end{array}$$

- (a) Voor welke waarde(n) van a heeft het stelsel geen oplossingen?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a & a \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & a-3 & a-2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 \end{array} \right]$$

Er zijn geen oplossingen als $a - 1 \neq 0$ en tegelijkertijd $a + 1 = 0$, dus als $a = -1$.

- (b) Los het stelsel vergelijkingen op in het geval $a = 1$.

Boven invullen geeft $x = 4/3$, $y = -1/3$, $z = 0$.

6. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- (a) Bereken de eigenwaarden van deze matrix.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ en } \lambda_2 = 3$$

- (b) Bereken de eigenvectoren van deze matrix.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3-3 & 1 \\ 0 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- (c) Hoe kun je je antwoorden op een andere manier controleren? Doe dit.

$$\begin{aligned}A\mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \\ A\mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \mathbf{v}_2\end{aligned}$$

7. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) A kan worden opgevat als een lineaire transformatie. Beschrijf deze transformatie in meetkundige termen (zoals rotatie, spiegeling, of iets dergelijks).

Rotatie om z -as, 90° met de klok mee gezien vanuit positieve z -positie.

(b) Bepaal de inverse matrix A^{-1} .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Dus

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ook uit de meetkundige interpretatie te zien zonder berekeningen.)

(c) Geef een voorbeeld van een 2×2 -matrix B zo dat $B^8 = I$ maar $B \neq I$, $B^2 \neq I$, en $B^4 \neq I$.

Rotatie 45° met de klok mee of tegen:

$$B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ of } B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
