

Tentamen SK-BWSNK2

2 februari 2016

Antwoordmodel

Reken eventueel met halve punten.

Opgave 1 (10 punten)

- $f_x = 3x^2 + 6xy$ en $f_y = 3x^2 + 3y^2 - 3$ (1 punt)
- Stel $f_x = 0$ en $f_y = 0$, dan $x(x + 2y) = 0$ en $x^2 + y^2 = 1$. Daaruit volgt $x = 0$ of $x = -2y$. (2 punten)
- $x = 0$ impliceert $y = \pm 1$, dus punten $(0, 1)$ en $(0, -1)$ (1 punt).
- $x = -2y$ substitueren geeft $5y^1 = 1$, dus $y = \pm \frac{1}{5}\sqrt{5}$ met $x = \mp \frac{2}{5}\sqrt{5}$, dus de punten $(\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{1}{5}\sqrt{5})$ en $(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5})$ (1 punt)
- $f_{xx} = 6x + 6y$, $f_{xy} = 6x$ en $f_{yy} = 6y$ (1 punt)
- 4 punten voor de tabel:

	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	aard
$(0, 1)$	6	6	0	36	lok.min.
$(0, -1)$	-6	-6	0	36	lok.max.
$(\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{1}{5}\sqrt{5})$	$\frac{6}{5}\sqrt{5}$	$-\frac{6}{5}\sqrt{5}$	$\frac{12}{5}\sqrt{5}$	-36	zadel
$(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5})$	$-\frac{6}{5}\sqrt{5}$	$\frac{6}{5}\sqrt{5}$	$-\frac{12}{5}\sqrt{5}$	-36	zadel

Opgave 2 (5+2+2 punten)

a) Merk op $\frac{dy}{dx} = 3x^2$.

$$\begin{aligned}
 & \int_C (2xy^2 + 3)dx + 2x^2ydy \\
 &= \int_C (2xy^2 + 3 + 2x^2y \frac{dy}{dx})dx \quad 1 \text{ punt} \\
 &= \int_C (8x^7 + 3)dx \text{ goed substitueren en vereenvoudigen} \quad 2 \text{ punten} \\
 &= [x^8 + 3x]_0^2 \quad 1 \text{ punt} \\
 &= 262 \quad 1 \text{ punt.}
 \end{aligned}$$

b) $g_x = 2xy^2 + 3$ en $g_y = 2x^2y$ (2 punten).

c) $g(2, 8) - g(0, 0) = 4 \cdot 64 + 6 - 0 = 262$.

Opgave 3 (6+6 punten)

a)

$$\begin{aligned}
& \int \int_R \cos(x+y) dA \\
&= \int_0^\pi \int_0^{\pi/2-x/2} \cos(x+y) dy dx \quad 2 \text{ punten} \\
&= \int_0^\pi [\sin(x+y)]_0^{\pi/2-x/2} dx \quad 1 \text{ punt} \\
&= \int_0^\pi \sin(\pi/2+x/2) - \sin(x) dx \quad 1 \text{ punt} \\
&= [-2\cos(\pi/2+x/2) + \cos(x)]_0^\pi \quad 1 \text{ punt} \\
&= 0 \quad 1 \text{ punt}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& \int \int_S x^3 dA \\
&= \int_{\pi/2}^\pi \int_1^2 r^3 \cos^3(\theta) r dr d\theta \quad 2 \text{ punten} \\
&= \int_{\pi/2}^\pi \cos^3(\theta) d\theta \int_1^2 r^4 dr \\
&= \int_{\pi/2}^\pi \cos(\theta) - \cos(\theta) \sin^2(\theta) d\theta \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_1^2 \\
&= \frac{31}{5} \left[\sin(\theta) - \frac{1}{3} \sin^3(\theta) \right]_{\pi/2}^\pi \quad 3 \text{ punten} \\
&= -\frac{62}{15} \quad 1 \text{ punt}
\end{aligned}$$

Opgave 4 (4 punten)

Bijvoorbeeld: laat zien dat alle kolom vectoren $a = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$, $b = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)$ en $c = \frac{1}{3}(-1, -2, 2)$ lengte 1 hebben (2 punten) en onderling loodrecht zijn $a \cdot b = 0$, $a \cdot c = 0$ en $b \cdot c = 0$ (2 punten).

Opgave 5: (5 punten)

$\frac{\partial W}{\partial U} = 4U^3V + 3V^3$ en $\frac{\partial W}{\partial V} = U^4 + 9UV^2 + 2V$ (2 punten), dus

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_W = -\frac{\frac{\partial W}{\partial V}}{\frac{\partial W}{\partial U}} = -\frac{U^4 + 9UV^2 + 2V}{4U^3V + 3V^3}$$

(3 punten)

Opgave 6: (4+4+2 punten)

a) $\det(A) = 8$ (berekening 2 punten, antwoord 1 punt), dus het oplosbaar (1 punt).

$$b) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4 \text{ punten voor de berekening})$$

c)

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 7: (4+4+2 punten)

a) $\sin(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $\theta = -45^\circ$ (1 punt). Dus 45 graden draaien om de x -as (2 punt) met de klok mee als je in de negatieve richting van de x -as kijkt.

b)

$$\begin{aligned}\det(S - \lambda \mathbb{I}) &= (1 - \lambda)\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \frac{1}{4}\right) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1)\end{aligned}$$

(3 punten) Dus $\lambda = \pm 1$ (1 punt).

c)

$$S - \lambda \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}.$$

(1 punt). Eén vector die duidelijk loodrecht op alle rijvectoren staat is $(0, 1, 0)$ (1 punt). De ander kiezen we van de vorm $(1, 0, a)$. En dan vinden we de vergelijking $(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1) + \frac{1}{2}a = 0$ (1 punt). Oplossing: $a = \sqrt{3} + 2$ (1 punt). Dus de andere vector is $(1, 0, \sqrt{3} + 2)$ (1 punt).