

Tentamen SK-BWSNK1

8 november 2016

Antwoordmodel

Reken eventueel met halve punten.

Opgave 1: vectoren (2+4+3 punten)

- a) $P = R - \overrightarrow{PR} = (2, 2, 2) - (-7, -5, 1) = (9, 7, 1)$. En $Q = P + \overrightarrow{PQ} = (9, 7, 1) + (1, -2, 3) = (10, 5, 4)$
- b) $\arccos \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}|} \approx 1,38 \approx 79,33^\circ$.
- c) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (13, -22, -19)$. Dan, **bijvoorbeeld**, $S = (9, 7, 1) + (13, -22, -19) = (22, -15, -18)$.

Opgave 2: differentieer en primitieveer (3+ 4 punten)

- a) $f'(x) = -\sin(x\sqrt{x+1}) \left(\sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \right)$ met de ketting- en de product-regel.
- b) $\int \sin(2x) \sin^2(x) dx = 2 \int \sin^3(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \sin^4(x) + C$.

Opgave 3: functie (2+4+4 punten)

- a) Als $x \ln(x^2) = 0$, dan $x = 0$ of $\ln(x^2) = 0$. De eerste mogelijkheid vervalt, want $x \neq 0$. De tweede geeft $x^2 = 1$. Dus $x = \pm 1$.
- b) $f'(x) = \ln(x^2) + 2$. Vervolgens: $\ln(x^2) + 2 = 0$ geeft $x^2 = e^{-2}$. Dus $x = \pm \frac{1}{e}$ en de punten zijn $(\pm \frac{1}{e}, \mp \frac{2}{e})$.
- c) Met substitutie $p = x^2$ (en $\int \ln(p) dp = p \ln p - p$) vind je $\frac{1}{2} \int_1^e 2x \ln(x^2) dx = \frac{1}{2} [x^2 \ln(x^2) - x^2]_1^e = \frac{1}{2} (e^2 + 1)$. Partieel integreren werkt ook met (verrassenderwijs) $2x$ integreren en $\ln(x^2)$ differentiëren.

Opgave 4: differentiaalvergelijking (7 punten)

Met scheiden van variabelen: $\int e^y dy = \int \frac{1}{x^2+3x} dx$ (1 punt). Dan breuksplitsen: $e^y = \int \frac{1}{3x} - \frac{1}{3(x+3)} dx$ (2 punten). Dus

$$y = \ln \left(\frac{1}{3} \ln \left(\left| \frac{x}{x+3} \right| \right) + C \right).$$

(2 punten) De randvoorwaarde geeft $0 = \ln(\frac{1}{3} \ln(\frac{1}{4}) + C)$. Dus $c = 1 + \frac{1}{3} \ln(4)$. Al met al:

$$y = \ln \left(\frac{1}{3} \ln \left(\left| \frac{x}{x+3} \right| \right) + 1 + \frac{1}{3} \ln(4) \right).$$

(2 punten) of (maar dat hoeft niet)

$$y = \ln \left(\ln \sqrt[3]{\left| \frac{4e^3 x}{x+3} \right|} \right).$$

Opgave 5: Maclarenreeks (7 punten)

$2x$ invullen in de reeks voor $\sin$ geeft $\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \dots = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + \dots$ (2 punten). De afgeleide van $\frac{4}{(1+x)^2}$ is $\frac{-8}{(1+x)^3}$. Van de hogere afgeleiden doet eigenlijk ook alleen de teller ertoe voor de reeks. Die tellers zijn $4 = 4 \cdot 1!$, $-8 = -4 \cdot 2!$, $24 = 4 \cdot 3!$, $-96 = -4 \cdot 4!$, $480 = 4 \cdot 5!$ (3 punten). Dus

$$\frac{4}{(1+x)^2} = 4 - 8x + 12x^2 - 16x^3 + 20x^4 + \dots$$

(1 punt) en

$$\frac{4}{(1+x)^2} + \sin(2x) = 4 - 6x + 12x^2 - 17\frac{1}{3}x^3 + 20x^4 - \dots$$

(1 punt) **Opgave 6: Complexe getallen (3+2+4 punten)**

a) $\frac{2+3i}{7-i} \cdot \frac{7+i}{7+i} = \frac{11+23i}{50} = \frac{11}{50} + \frac{23}{50}i.$

b) $e^{7\frac{1}{4}\pi i} = \cos(1\frac{1}{4}\pi) + i \sin(1\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i.$

c) $\arg(\sqrt{3}-i) = \frac{11}{6}\pi$ en $|\sqrt{3}-i| = 2$ (2 punten). Dus $\arg((\sqrt{3}-i)^{12}) = 12 \cdot \frac{11}{6}\pi \bmod (2\pi) = 0$ (1 punt). Dus $(\sqrt{3}-i)^{12} = 2^{12} = 4096$ (1 punt).