

Aanwijzingen

- Geef een duidelijke uitwerking met voldoende tussenstappen.
- Alleen een antwoord zonder motivatie is altijd fout.
- Geef exacte antwoorden (geen decimalen).
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Grafische rekenmachines, formulebladen etc zijn verboden.
- Totaal 36 punten.

1. Bereken de afgeleide $f' \left(\frac{\pi}{6} \right)$ van $f(x) = \ln(1 + \sin(2x))$.

4 pt.

Uitwerking: We berekenen eerst $f'(x)$ met de standaardafgeleide van $\ln$ en tweemaal de kettingregel:

$$f'(x) = \frac{2 \cos(2x)}{1 + \sin(2x)},$$

daarna vullen we $x = \frac{\pi}{6}$ in, dus $2x = \frac{\pi}{3}$. Merk op dat $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ en $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, zodat

$$f' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}.$$

2. Bepaal $\frac{dy}{dx}$ voor de impliciete functie $y^2(y^2 - 1) = x^2(x^2 - 2)$.

4 pt.

Uitwerking: Impliciet differentiëren geeft

$$(2y(y^2 - 1) + y^2 \cdot 2y) dy = (2x(x^2 - 2) + x^2 \cdot 2x) dx.$$

Dit kunnen we vereenvoudigen tot

$$2y(2y^2 - 1)dy = 2x(2x^2 - 2)dx.$$

Dus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2 - 2)}{y(2y^2 - 1)}.$$

3. a. Bereken $\int_0^1 x e^{-x} dx$.

4 pt.

Uitwerking: We gaan partieel integreren (met $f'(x) = e^{-x}$ en $g(x) = x$):

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-x} dx &= -x e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= (-e^{-1} - 0) - e^{-x} \Big|_0^1 \\ &= -e^{-1} - (e^{-1} - e^0) = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

b. Bepaal $\int e^x \sqrt{2 + e^x} dx$.

4 pt.

Uitwerking: Deze doen we met substitutie $u = e^x$ waarbij we dan krijgen $du = e^x dx$. Invullen geeft

$$\begin{aligned}\int e^x \sqrt{2 + e^x} dx &= \int \sqrt{2 + u} du \\ &= \frac{2}{3} (2 + u)^{3/2} + c.\end{aligned}$$

Eventueel kun je voor de laatste stap nog een substitutie $v = 2 + u$ doen.

4. Los het volgende beginwaardeprobleem op:

4 pt.

$$2xy' = (x - 1)y, \quad y(1) = 2e.$$

Uitwerking: Het is een separabele vergelijking dus we zullen eerst de variabelen scheiden:

$$2 \frac{dy}{y} = \frac{x - 1}{x} dx,$$

wat we kunnen integreren nadat we de rechterbreuk doordelen:

$$2 \int \frac{dy}{y} = \int 1 - \frac{1}{x} dx,$$

oftewel

$$2 \ln y = x - \ln x + c_1.$$

Door de gegeven beginwaarde weten we al dat x en y positief zijn dus er zijn geen $|\cdot|$ -streepjes nodig in de logaritmen! Exponentiëren geeft vervolgens

$$y^2 = c_2 \frac{e^x}{x}.$$

Je mag hierbij opmerken dat $c_2 = e^{c_1}$ maar dat hoeft niet. Wel heb je nodig dat $c_2 > 0$ voor de volgende stap, namelijk worteltrekken:

$$y = c_3 \sqrt{\frac{e^x}{x}}.$$

Tot slot vullen we de beginwaarde $y = 2e$ bij $x = 1$ in om de constante te bepalen. We moeten dus eisen:

$$2e = c_3 \sqrt{\frac{e}{1}} = c_3 \sqrt{e},$$

waaruit volgt dat $c_3 = 2\sqrt{e}$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus

$$y = 2\sqrt{\frac{e^{1+x}}{x}}$$

of een andere equivalente vorm naar smaak.

5. Geef een benadering van $\sqrt{2}$ middels een 3e orde Taylorveelterm van $\sqrt{1+x}$ in steunpunt 0. 4 pt.

Uitwerking: We gebruiken de Taylorformule voor 3e orde en steunpunt 0:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3,$$

waarvan de functie f en z'n afgeleiden in 0 hieronder getabelleerd staan:

$f(x) = (1+x)^{1/2},$	$f(0) = 1$
$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2},$	$f'(0) = \frac{1}{2}$
$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2},$	$f''(0) = -\frac{1}{4}$
$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2},$	$f'''(0) = \frac{3}{8}$

Wanneer we dit invullen krijgen we:

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3.$$

We benaderen $\sqrt{2}$ door $x = 1$ te kiezen:

$$\sqrt{2} \approx P_3(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{23}{16}.$$

Opmerking: sommige studenten zitten te pitten en kiezen $x = 2$, dit geeft een duidelijk fout antwoord $> 3/2$. Verder komen de breuken zo netjes uit dat we hier wel vereenvoudiging van het antwoord verwachten.

6. Zij $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. 4 pt.

Bepaal een vector die loodrecht op zowel $\mathbf{u}$ als $\mathbf{v}$ staat.

Uitwerking: De snelste oplossing is het uitproduct nemen, want het uitproduct van $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ staat loodrecht op $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$. We hoeven niet op de lengte te letten en ook niet op de oriëntatie, dus we zijn in één keer klaar:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot -5 - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 3 - -5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 2 - -2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 36 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

7. Vind alle complexe oplossingen z van de vergelijking $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$. Geef je antwoord in modulus-argumentvorm (poolnotatie). 4 pt.

Uitwerking: Oplossen komt hier gewoon neer op worteltrekken, en worteltrekken gaat het makkelijkste door eerst z in modulus-argumentvorm te schrijven, immers we weten dat als $z = re^{\phi}$ dan $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{\phi/2+k\pi}$, met $k = 0$ of $k = 1$ (twee oplossingen)

in het complexe vlak die diametraal tegenover elkaar liggen). Dus we berekenen

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

en

$$\tan \arg z = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}.$$

We merken op dat z in het 2e kwadrant ligt (immers $\operatorname{Re} z < 0$ en $\operatorname{Im} z > 0$), zo vinden we dat

$$\phi = \arg z = \frac{2}{3}\pi.$$

Dus $z = 2e^{2\pi/3}$. Zoals eerder opgemerkt zijn dan de twee oplossingen van de vergelijking

$$\sqrt{2}e^{\pi/3} \text{ en } \sqrt{2}e^{4\pi/3}.$$

8. Een konijn zit op de getallenlijn in $x = 0$. Ze springt steeds één plek naar rechts (+1) of naar links (−1) met gelijke kansen.

- a. Hoe groot is de kans dat ze na 4 sprongen in $x = 0$ zit?

2 pt.

Uitwerking: Er zijn verschillende manieren om dit op te lossen: je kunt de binomiale kansverdeling gebruiken, of het aantal mogelijke routes waarop ze in 0 terug komt delen door het totaal aantal mogelijke routes. Dat tellen kun je bij de a-opgave zonder theorie doen door gewoon alle mogelijkheden op te schrijven. Bij de b-opgave zijn dat er te veel en heb je wel theorie nodig.

Als je het gewoon uittelt, dan zie je al snel dat er 6 manieren zijn om precies $2 \times$ naar links te gaan en $2 \times$ naar rechts. In totaal zijn er $2^4 = 16$ manieren om $4 \times$ achterelkaar ofwel naar links, ofwel naar rechts te springen. De kans om na vier sprongen precies in 0 te zitten is dus $P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Voor de andere aanpakken, zie b.

- b. Hoe groot is de kans dat ze na 10 sprongen in $x = 0$ zit?

2 pt.

Uitwerking: Ook in dit geval kun je de opgave nog opvatten als een kansprobleem of als een telprobleem. Anders gezegd: je kunt dit oplossen door de binomiale kansverdeling te gebruiken met $p = \frac{1}{2}$ en precies vijf “successen” uit tien “experimenten” (elke sprong een experiment met uitkomst “links” of “rechts”, waarbij je één van beide als een “succes” beschouwt). De binomiale formule geeft dan

$$P(5L \text{ en } 5R) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 252 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}.$$

Als telprobleem kun je dit ook krijgen: er zijn $\binom{10}{5}$ manieren om vijf keer links en vijf keer rechts te springen, en er zijn totaal 2^{10} mogelijke manieren om tien keer te springen. Als je deze door elkaar deelt kom je ook op $\frac{63}{256}$ uit.

Let wel, de “telmethodes” werken in dit geval omdat dat kansen op de twee verschillende sprongen gelijk zijn. Als dat niet zo was dan is het makkelijker om de binomiale kansverdeling te nemen.



"Who in the world am I?
Ah, that's the great puzzle."