

# TENTAMEN Wiskunde 2 voor Chemici

*Dinsdag 8 november 2016; 17:00-20:00*

1. Schrijf je naam, voorletters en studentnummer op elk vel papier.
2. Nummer alle pagina's en maak iedere opgave op een nieuw vel!
3. *Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.*
4. Het gebruik van het boek van Steiner en het diktaat is wel toegestaan, echter **niet**: aantekeningen en uitwerkingen van opgaven!
5. (Grafische) rekenmachientjes mogen wel worden gebruikt, maar laptops en verbindingen met internet (natuurlijk) **niet**.

*SUCCES!*

## Opgave 1

Bepaal m.b.v. scheiding van variabelen de oplossing  $y(x)$  van de differentiaalvergelijking  $y' = \frac{y+1}{x-1}$  met beginvoorwaarde  $y(0) = 1$ .

## Opgave 2

Bereken m.b.v. Taylorreeksen de volgende limiet:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin(x) - 1}{x^2 - x^3}$ .

## Opgave 3

Gegeven is de temperatuurverdeling  $T(x, y) = \sqrt{2} e^{-x} \cos(y)$ .

- (a) Bereken de gradient van de temperatuur  $T$ .
- (b) Bepaal de matrix  $\mathcal{H}$  (Hessiaan) en de Laplaciaan  $\Delta T$ .
- (c) Bepaal de richtingsafgeleide van  $T$  in het punt  $(0, \pi)$  in de richting van de vector  $(1, 1)^T$ .
- (d) Bereken de eigenwaarden van de matrix  $\mathcal{H}$  uit onderdeel (b) in het punt  $(x, y) = (0, \frac{\pi}{4})$ .

## Opgave 4

Gegeven zijn de drie reeksen:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} n\sqrt{n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^3}.$$

Welke reeks convergeert, welke divergeert? Geef aan welk criterium je gebruikt!

## Opgave 5

Gegeven is de differentiaalvergelijking  $y' = x^2 y$  met beginvoorwaarde  $y(0) = 3$ . We zoeken een reeksoplossing van de vorm  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ .

- (a) Laat zien dat geldt:  $c_0 = 3$ ,  $c_1 = 0$  en  $c_2 = 0$ .
- (b) Bepaal de term  $h(n)$  in de recursie:  $c_{n+1} = h(n)c_{n-2}$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$
- (c) Check dat  $c_{3n+1} = c_{3n+2} = 0$  en  $c_{3n} = \frac{1}{3^n n!}$  voor  $n = 1, 2, 3, \dots$
- (d) Maak aannemelijk dat de gevonden reeks de Taylorreeks rond 0 is van de functie  $y(x) = 3 e^{\frac{1}{3}x^3}$ .

## Opgave 6

Beschouw de functie  $f(t) = t^2$  op het interval  $-\pi < t < \pi$ . Breid deze functie periodiek uit naar  $t \in [-\infty, \infty]$  (zoals in Steiner wordt beschreven).

- (a) Schets de grafiek van  $f$  na deze periodieke uitbreiding. Is dit een even of oneven functie?
- (b) Bepaal de coëfficiënten  $a_0$  en  $b_0$  uit de Fourierreeks van  $f$ .
- (c) Laat zien dat geldt:  $a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$  voor  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Bepaal ook de  $b_n$ 's.
- (d) (BONUS) Laat m.b.v. onderdelen (b) en (c) zien dat we het getal  $\pi$  kunnen schrijven als:  $\pi = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2}}$ .

## Opgave 7

Beschouw het niet-lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

met  $f(x, y) = yx + y$  en  $g(x, y) = xy + 3x$ .

- (a) Bepaal de kritieke punten van dit stelsel.
- (b) Bereken de Jacobiaan van het rechterlid  $[f(x, y), g(x, y)]^T$ .
- (c) Bepaal de aard van de kritieke punten uit onderdeel (a).
- (d) Maak een schets van het bijbehorende faseplaatje.