

TENTAMEN Wiskunde 2 voor Chemici

Dinsdag 5 november 2019; 17:00-19:30

1. Schrijf je naam, voorletters en studentnummer op elk vel papier.
2. Schrijf ook je naam (maar geen uitwerkingen) op het omslagvel.
3. Alle pagina's zijn genummerd: maak iedere opgave op het bijbehorende vel!
4. *Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.*
5. Het gebruik van het boek van Steiner en de reader is wel toegestaan, echter **niet** toegestaan zijn: aantekeningen en uitwerkingen van opgaven!
6. (Grafische) rekenmachientjes mogen wel worden gebruikt, maar laptops en verbindingen met internet (natuurlijk) **niet**.
7. Met DV wordt in de vragen bedoeld: DifferentiaalVergelijking.

SUCCES!

Vraag 1

Gegeven zijn de drie reeksen:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{4^n + 2^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n^{200}}.$$

Laat zien dat de reeks (a) *divergeert*.

Convergeren de reeksen (b) en (c)?

Geef hierbij duidelijk aan welk *criterium* je gebruikt!

Vraag 2

Gegeven is dat, in een bepaalde situatie, de energie E en de dichtheid ρ op de volgende manier afhangen van de temperatuur T :

$$E(T) = \cos(T^2) - 1 + \frac{T^4}{2} \quad \text{en} \quad \rho(T) = T^2(T - \sin(T))^2.$$

(a) Bepaal *tot en met* de term met T^8 de Taylorreeksen van $E(T)$ en $\rho(T)$ *rond* de temperatuur $T = 0$.

(b) Bereken *m.b.v. onderdeel (a)*: $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{E(T)}{\rho(T)}$.

Vraag 3

Bepaal m.b.v. *scheiding van variabelen* de oplossing $y(x)$ van de DV:

$$y' = 4x - 2xy$$

met beginvoorwaarde $y(0) = 5$.

Vraag 4

Voor de omkeerbare chemische reactie $A \xrightleftharpoons[k_2]{k_1} B$ met reactiesnelheden k_1 en k_2 kan men het volgende stelsel *lineaire* DV'en opstellen:

$$\begin{cases} a'(t) = -k_1 a(t) + k_2 b(t), & a(0) = a_0, \\ b'(t) = k_1 a(t) - k_2 b(t), & b(0) = b_0. \end{cases}$$

Hierin zijn, respectievelijk, $a(t)$ en $b(t)$ de concentraties van stoffen A en B . Bepaal de oplossing van dit stelsel voor $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $a_0 = 1$ en $b_0 = 5$. Wat worden de uiteindelijke waarden van de concentraties voor A en B ? (d.w.z. voor $t \rightarrow \infty$)

Vraag 5

Gegeven is de energieverdeling $\mathcal{E}(x, y) = \frac{x+y}{x-y} + 1200$ (voor $x \neq y$).

- (a) Bereken de gradient van de energie $\mathcal{E}$.
- (b) Bepaal de Hessiaan $\mathcal{H}$ en $\nabla \cdot (\nabla \mathcal{E})$.
- (c) Bereken de richtingsafgeleide van $\mathcal{E}$ in het punt $(2, 1)$ in de richting van de vector $[1, -3]^T$.
- (d) Laat zien dat voor een *algemene* energieverdeling $\mathcal{E}(x, y, z)$, nu in *drie dimensies*, geldt:

$$\nabla \times (\nabla \mathcal{E}) = \vec{0}.$$

Vraag 6

Bekijk de DV: $y' = x^2y$ met $y(0) = 162$.

Neem aan dat de oplossing van deze DV te schrijven is als $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

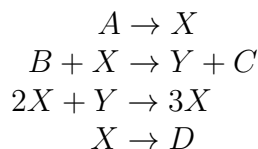
Laat zien dat de coëfficiënten a_n voldoen aan de *recursie*:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Bepaal hiermee a_0 , a_1 , a_2 , a_3 tot en met a_9 .

Vraag 7

Voor de chemische reacties (ook wel het "Brusselator-model" genoemd)



kan men, na vereenvoudiging en verschillende aannames, het volgende stelsel *niet-lineaire* DVen opstellen:

$$\begin{cases} x' = a - (b+1)x + x^2y, \\ y' = bx - x^2y. \end{cases}$$

Hierin zijn, respectievelijk, $a(t)$, $b(t)$, $x(t)$ en $y(t)$ de concentraties van stoffen A , B , X en Y . We veronderstellen nu dat $a = 2$ en $b = 4$ (constante concentraties voor A en B).

- (a) Bepaal het kritieke punt van dit stelsel.
- (b) Bepaal de aard van het kritieke punt uit onderdeel (a).
- (c) *Schets* het bijbehorende faseplaatje.

Vraag 8

Gegeven is de *advection-reactie* partiële DV (PDV):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - 7 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -3 u(x, t), \quad \text{met beginvoorwaarde } u(x, 0) = \sin(\pi x).$$

Laat zien dat de oplossing van deze PDV luidt: $u(x, t) = e^{-3t} \sin(\pi(x + 7t))$.