

TENTAMEN Wiskunde 2 voor Chemici

Dinsdag 3 november 2020; 17:00-19:30

1. Schrijf je naam, voorletters en studentnummer op elk vel papier.
2. Schrijf ook je naam (maar geen uitwerkingen) op het omslagvel.
3. Alle pagina's zijn genummerd: maak iedere opgave op het bijbehorende vel!
4. *Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.*
5. Het gebruik van het boek van *Steiner* en de Reader is wel toegestaan, echter **niet** toegestaan zijn: aantekeningen en uitwerkingen van opgaven!
6. (Grafische) rekenmachientjes mogen worden gebruikt.
7. Met DV wordt in de vragen bedoeld: DifferentiaalVergelijking.

SUCCES!

Vraag 1 (*max. 12 punten*)

Gegeven zijn de vier reeksen:

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{6}}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} n^{\frac{4}{3}}.$$

Laat zien dat: reeks (a) *convergeert* ("comparison test"), reeks (b) *divergeert* ("integral test") en reeks (c) *convergeert* ("ratio test"). Waarom *divergeert* reeks (d)?

Vraag 2 (*max. 10 punten*)

Bepaal m.b.v. *scheiding van variabelen* de oplossing $y(x)$ van de DV:

$$y' = -\frac{y^2}{x}$$

met beginvoorwaarde $y(1) = \frac{1}{3}$.

Vraag 3 (max. 12 punten)

Gegeven is dat, in een bepaalde situatie, de temperatuur $\mathcal{T}(x)$ en de energie $\mathcal{E}(x)$ op de volgende manier afhangen van de positie x op een aluminium staaf ter lengte L :

$$\mathcal{T}(x) = \cos(x^2) - e^{x^4} \quad \text{en} \quad \mathcal{E}(x) = \sin(x^4).$$

(a) Bepaal *tot en met* de term met x^{12} de Taylorreeksen¹ van $\mathcal{T}(x)$ en $\mathcal{E}(x)$ in de buurt van het beginpunt van de staaf $x = 0$.

(b) Bereken de verhouding van de temperatuur $\mathcal{T}$ tot de energie $\mathcal{E}$ aan het begin van de staaf, d.w.z. bepaal: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(x)}{\mathcal{E}(x)}$. Gebruik hiervoor onderdeel (a)!

Vraag 4 (max. 12 punten)

Gegeven is de dichtheidsverdeling $\rho(x, y) = (x - 4)^2 + 2(y + 5)^2 + 2020$.

(a) Bereken de *gradient* van de dichtheid ρ .

(b) Bepaal de *Hessiaan* $\mathcal{H}$ en de *Laplaciaan* $\Delta\rho$.

(c) Bereken de *richtingsafgeleide* van ρ in het punt $(6, 1)$ in de richting van de vector $[3, 4]^T$.

(d) Bepaal de stationaire punten van ρ en hun karakter (minimum, maximum of zadelpunt).

Vraag 5 (max. 10 punten)

Bekijk de eerste-orde DV: $y' = y + x^2$ met beginvoorwaarde $y(0) = -2$.

Bepaal de oplossing van deze DV m.b.v de *aanname*: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Vraag 6 (max. 12 punten)

Beschouw het volgende stelsel *niet-lineaire* DVen;

$$\begin{cases} x' = y - 2xy, \\ y' = 2xy - x. \end{cases}$$

(a) Bepaal de *twee* kritieke punten van dit stelsel.

(b) Bepaal de *aard* van deze kritieke punten.

(c) *Schets* het bijbehorende faseplaatje.

¹**Hint: maak gebruik van bekende Taylorreeksen!**

Vraag 7 (*max. 10 punten*)

Gegeven is de *niet-lineaire diffusie-vergelijking*:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = u(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad \text{met } u(0, t) = u(1, t) = \frac{1}{1-t}.$$

Bepaal de oplossing van deze partiële DV; gebruik hiervoor de *aanname* dat de oplossing van de volgende vorm is: $u(x, t) = \frac{X(x)}{1-t}$.

Vraag 8 (*max. 10 punten*)

Gegeven is de *niet-lineaire* functie:

$$f(x) = 2x - \ln(x) - 4, \quad x > 0.$$

Benader een nulpunt van f m.b.v. *Newton-Raphson*: pas deze toe met $x_0 = 3$ en bereken x_1, x_2 , en x_3 . Noteer 4 cijfers achter de komma.

Vraag 9 (*max. 12 punten*)

Gegeven is de *inhomogene* tweede-orde DV:

$$2y'' - y' - y = 4xe^{2x}, \quad y(0) = -\frac{28}{25}, \quad y'(0) = \frac{39}{25}.$$

Bepaal, achtereenvolgens, de algemene *homogene* oplossing, een *particuliere* oplossing en de *volledige oplossing* van deze DV.