

TENTAMEN Wiskunde 2 voor Chemici

Woensdag 10 november 2021; 11:30-14:00

1. Schrijf je naam, voorletters en studentnummer op elk vel papier.
2. Schrijf ook je naam (maar geen uitwerkingen) op het omslagvel.
3. Alle pagina's zijn genummerd: maak iedere opgave op het bijbehorende vel!
4. Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien **hoe** je eraan gekomen bent.
5. Het gebruik van het boek van *Steiner* en de *formulebladen* is wel toegestaan, echter **niet** toegestaan zijn: aantekeningen en uitwerkingen van opgaven!
6. Een (grafische) rekenmachine mag worden gebruikt, maar laptops, tablets en verbindingen met internet (natuurlijk) **niet**.
7. Met DV wordt in de vragen bedoeld: DifferentiaalVergelijking.

SUCCESES!!!

Vraag 1 (max. 12 punten)

Gegeven zijn de vijf reeksen:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 6}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{3^n}, \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n+7}, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{11}}.$$

Laat zien dat: reeks (a) *convergeert* ("comparison test"), reeks (b) *divergeert* ("integral test") en reeks (c) *convergeert* ("ratio test"). Waarom *divergeert* reeks (d)? En waarom *convergeert* reeks (e)?

Vraag 2 (max. 10 punten)

Gegeven is dat, in een bepaalde situatie, de temperatuur $\mathcal{T}(t)$ en de energie $\mathcal{E}(t)$ op de volgende manier afhangen van de tijd t op een koperen staaf:

$$\mathcal{T}(t) = 1 - \sqrt{1+t^2} \quad \text{en} \quad \mathcal{E}(t) = e^{t^2} - \cos(t).$$

(a) Bepaal, tot en met de term met t^6 , de Taylorreeksen¹ van $\mathcal{T}(t)$ en $\mathcal{E}(t)$ in de buurt van het begin-tijdstip $t = 0$.

(b) Bereken de verhouding van de temperatuur $\mathcal{T}$ tot de energie $\mathcal{E}$ op het begin-tijdstip $t = 0$, d.w.z. bepaal: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(t)}{\mathcal{E}(t)}$. Gebruik hiervoor onderdeel (a)!

¹Hint: maak gebruik van bekende Taylorreeksen!

Vraag 3 (max. 10 punten)

Beschouw de 2π -periodieke functie

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{voor } -\pi < t < 0, \\ 4, & \text{voor } 0 < t < \pi. \end{cases}$$

(breid deze functie periodiek uit, zoals in Steiner wordt aangegeven).

De Fourierreeks van f wordt gegeven door:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)].$$

- (a) Bepaal de coëfficiënten a_0 en b_0 uit de Fourierreeks van f .
- (b) Geef een algemene uitdrukking voor a_n en b_n ($n = 1, 2, \dots$).

Vraag 4 (max. 10 punten)

Bepaal m.b.v. *scheiding van variabelen* de oplossing $y(x)$ van de DV:

$$xy' = (2x + 1)e^{-y}, \quad x > 0$$

met beginvoorwaarde $y(1) = 0$.

Vraag 5 (max. 12 punten)

Gegeven is de *inhomogene* tweede-orde DV:

$$y'' + y' = 2e^{3t}, \quad y(0) = \frac{11}{5}, \quad y'(0) = \frac{18}{5}.$$

Bepaal, achtereenvolgens, de algemene *homogene* oplossing $y_h(t)$, een *particuliere* oplossing $y_p(t)$ en de *volledige oplossing* $y(t)$ van deze DV.

Vraag 6 (max. 12 punten)

Beschouw het volgende stelsel *niet-lineaire* DV'en;

$$\begin{cases} x' = yx + y, \\ y' = xy + 3x. \end{cases}$$

- (a) Bepaal de *twee* kritieke punten van dit stelsel.
- (b) Bepaal de *aard* van deze kritieke punten.
- (c) *Schets* het bijbehorende faseplaatje.

Vraag 7 (*max. 12 punten*)

Gegeven is de temperatuurfunctie $\mathcal{T}(x, y) = (x - 1)^2 + cy^2 + 2022$, $c \neq 0$.

(a) Bereken, voor $c = 1$, de *richtingsafgeleide* van de temperatuur $\mathcal{T}$ in het punt $(7, 3)$ in de richting van de vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(b) Bepaal het stationaire punt van $\mathcal{T}$ en het karakter (minimum, maximum of zadelpunt). Let op: dit kan afhangen van de waarde van de parameter c .

(c) In het geval van een minimum (of maximum) bij onderdeel (b): welke minimale (of maximale) waarde neemt de temperatuur $\mathcal{T}$ aan in het stationaire punt?

Vraag 8 (*max. 12 punten*)

Bekijk de tweede-orde DV:

$$y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2.$$

We nemen aan dat de oplossing van deze DV in een reeksvorm geschreven kan worden als: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Bepaal de reeksoplossing voor $y(x)$ tot en met de term met x^4 , d.w.z. vind de coëfficiënten c_0 , c_1 , c_2 , c_3 en c_4 .

Vraag 9 (*max. 10 punten*)

Gegeven is de *transport-vergelijking*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + 3 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, \quad x \in (-20, 20)$$

met als beginconditie $u(x, 0) = e^{-x^2}$.

(a) Voor welke waarde van γ voldoet $u(x, t) = e^{-(x-\gamma t)^2}$ aan deze partiële DV.

(b) Schets de oplossing voor deze γ op de tijdstippen $t = 0$, $t = 1$ en $t = 2$. Verklaar ook de naam *transport-vergelijking*.