

TENTAMEN Wiskunde 2 voor Chemici

Woensdag 28 januari 2015; 13:30-16:30

1. Schrijf je naam, voorletters en studentnummer op elk vel papier.
2. Nummer alle pagina's en maak iedere opgave op een nieuw vel!
3. *Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.*
4. Het gebruik van het boek van Steiner en het diktaat is wel toegestaan, echter **niet**: aantekeningen en uitwerkingen van opgaven!
5. (Grafische) rekenmachientjes mogen wel worden gebruikt, maar laptops en verbindingen met internet (natuurlijk) **niet**.

SUCCES!

Opgave 1 (max. 12 punten)

Bepaal m.b.v. Taylorreeksen de volgende limiet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\cos(x) - 1}.$$

Opgave 2 (max. 12 punten)

Gegeven zijn de dichtheid $\rho(x, y, z) = x^2 - yz$ en de snelheid $\vec{v}(x, y, z) = [x^2, xz^2, zy^2]^T$. Bereken achtereenvolgens: $\nabla \rho$, $\nabla \cdot \vec{v}$ en $\nabla \times \vec{v}$.

Opgave 3 (max. 15 punten)

Laat zien dat de functie

$$u(x, t) = \cos(\sqrt{\pi}t) \cosh(\sqrt{\pi}t) \sin(2\pi x) + \sin(\sqrt{\pi}t) \sinh(\sqrt{\pi}t) \cos(2\pi x)$$

de oplossing¹ is van de partiële differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

met bijbehorende beginvoorwaarden $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ en de (periodieke) randvoorwaarden $u(0, t) = u(1, t)$.

Z.O.Z.

¹de functies $\sinh$ en $\cosh$ en hun afgeleiden zijn evt in het boek van Steiner op te zoeken.

Opgave 4 (max. 10 punten)

Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Opgave 5 (max. 15 punten)

Beschouw het niet-lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen (DVen):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = x + \exp(-y), \\ \dot{y} = g(x, y) = -y. \end{cases}$$

- (a) Bepaal alle kritieke punten van dit stelsel DVen.
- (b) Bereken de Jacobiaan van het rechterlid $(f(x, y), g(x, y))^T$.
- (c) Bepaal m.b.v. onderdeel (b) de aard van de kritieke punten uit (a) en geef aan of ze stabiel of instabiel zijn. Maak ook een schets van het faseplaatje.

Opgave 6 (max. 12 punten)

Beschouw de volgende tabel met hertentamencijfers van 12 studenten voor het vak Wiskunde 4 voor Archeologen:

cijfer	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	1	1	2	3	2	2	1

- (a) Bepaal het gemiddelde en de mediaan van de cijferverdeling.
- (b) Bereken de variantie en de standaardafwijking.
- (c) Bepaal de scheefheid ('skewness') van de verdeling.

Opgave 7 (max. 12 punten)

- (a) Onderzoek m.b.v. de ratiotest de convergentie van de reeks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$.
- (b) Onderzoek m.b.v. de integraaltest van Cauchy of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ convergeert of divergeert.

Opgave 8 (max. 12 punten)

Beschouw de functie $f(t) = t^2 + t$ op het interval $-\pi < t < \pi$. Breid deze functie periodiek uit naar $t \in [-\infty, \infty]$ (zoals in Steiner wordt aangegeven).

- (a) Bepaal de coëfficiënt a_0 uit de Fourierreeks van f .
- (b) Laat zien dat geldt: $a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$ voor $n = 1, 2, 3, \dots$