

TENTAMEN Wiskunde 2 voor Chemici

Woensdag 4 november 2015; 9:00-12:00

1. Schrijf je naam, voorletters en studentnummer op elk vel papier.
2. Nummer alle pagina's en maak iedere opgave op een nieuw vel!
3. *Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.*
4. Het gebruik van het boek van Steiner en het diktaat is wel toegestaan, echter **niet**: aantekeningen en uitwerkingen van opgaven!
5. (Grafische) rekenmachientjes mogen wel worden gebruikt, maar laptops en verbindingen met internet (natuurlijk) **niet**.

SUCCES!

Opgave 1

Bereken m.b.v. Taylorreeksen de volgende limiet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\pi^9 x} - 1}{\ln(1 - x)}.$$

Opgave 2

Gegeven is de temperatuurverdeling $T(x, y) = \sin(x)e^{-y}$. Bepaal van deze functie de Hessiaan $\mathcal{H}$ en de Laplaciaan Δ .

Opgave 3

Bepaal de oplossing $y(x)$ van de differentiaalvergelijking $y'' + 16y = 0$ met randvoorwaarden $y(0) = 0$ en $y(\frac{\pi}{8}) = 5$.

Opgave 4

Gegeven is de differentiaalvergelijking $y'' + x^2 y = 0$ met beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$. We zoeken een reeksoplossing van de vorm $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

- (a) Laat zien dat geldt: $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
- (b) Bepaal de term $b(n)$ in de recursie: $a_{n+2} = b(n)a_{n-2}$, $n = 2, 3, 4, \dots$
- (c) Bereken a_4 en a_5 .

Z.O.Z.

Opgave 5

Bepaal de eigenwaarden van de matrix $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$ (met parameter α). Bereken de determinant en het spoor van deze matrix. Voor welke waarden van α is de matrix singulier? Bepaal de eigenvectoren voor het geval $\alpha = 2$.

Opgave 6

Beschouw het niet-lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = x - xy, \\ \dot{y} = g(x, y) = -y + xy. \end{cases}$$

- (a) Bepaal alle kritieke punten van dit stelsel.
- (b) Bereken de Jacobiaan van het rechterlid $(f(x, y), g(x, y))^T$.
- (c) Bepaal de aard van de kritieke punten uit (a).
- (d) Maak een schets van het bijbehorende faseplaatje.

Opgave 7

Gegeven zijn de vectorfunctie $\mathbf{v} = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))^T$ en de scalaire functie $g = g(x, y, z)$. Bepaal $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$ en $\nabla \times (\nabla g)$.

Opgave 8

Gegeven zijn de vier reeksen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}.$$

Geef van elke reeks aan of deze convergeert of divergeert. Beargumenteer je antwoord!

Opgave 9

Bepaal de richtingsafgeleide van de functie $h(x, y) = x^2y^5$ in het punt $P = (3, 1)$ in de richting van de vector $(1, -4)^T$.

Opgave 10

Waar of niet waar? (geef ook aan waarom)

- (a) Een oplossing van de warmtevergelijking $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ is $u(x, t) = e^{\pi^2 t} \sin(\pi x)$.
- (b) Voor elke functie $f(x, y, z)$ geldt: $\text{div}(\text{grad}(f)) = \nabla f$.