

Hertentamen Wiskunde 3 (SK-BWIS3)

1 mei 2015, 9:00-12:00 uur

- Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer.
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Bij dit tentamen mogen geen dictaat, boek, aantekeningen, uitwerkingen en (geavanceerde) rekenmachines worden gebruikt. Mobieltjes moeten worden uitgeschakeld en opgeborgen.
- Puntenverdeling:

1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d	3e	4a	4b	4c	4d
10	7	8	8	9	8	4	4	9	4	4	10	4	4	7

OPGAVE 1

In deze opgave werken we met de 2×2 -matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

- Bereken de eigenwaarden en de eigenvectoren van de matrix A
- Bekijk nu de differentiaalvergelijking (voor een vectorwaardige functie $F(t)$)

$$\frac{d}{dt}F(t) = AF(t) \quad (\diamond)$$

Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $(\diamond)$.

- Geef de oplossing $F(t)$ van de differentiaalvergelijking $(\diamond)$ die ook voldoet aan de beginvoorwaarde $F(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

OPGAVE 2

We onderzoeken functies $u(x, t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$(\spadesuit) \quad u_t = u_{xx} - 4u_x + 4u \quad \text{voor } 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0.$$

- Eerst onderzoeken we oplossingen van $(\spadesuit)$ die te schrijven zijn als $u(x, t) = X(x)T(t)$ met $X(x)$ resp. $T(t)$ een twee maal differentieerbare functie van één variabele x resp. t .

Vertaal de partiële differentiaalvergelijking $(\spadesuit)$ in een paar gewone differentiaalvergelijkingen voor de functies $X(x)$ en $T(t)$.

- Geef alle functies $u(x, t)$ van de vorm $u(x, t) = X(x)T(t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking $(\spadesuit)$ en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{voor } t \geq 0.$$

- Geef een oplossing $u(x, t)$ van de partiële differentiaalvergelijking $(\spadesuit)$ die voldoet aan de begin- en randvoorwaarden

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 & \text{voor } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= e^{2x} \sin(x) + e^{2x} \sin(3x) & \text{voor } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Waarschuwing: De functie $u(x, t)$ in dit onderdeel heeft niet de bijzondere vorm $X(x)T(t)$.

Z.O.Z.

OPGAVE 3

In deze opgave bekijken we de 2π -periodieke functie $f(x)$ die wordt gegeven door

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \quad \text{als} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

- Teken de grafiek van de functie $f(x)$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.
- Laat zien dat voor alle gehele getallen k de Fouriercoëfficiënt $\hat{f}_k$ wordt gegeven door

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - x^2) \cos(kx) dx$$

- Bereken de Fouriercoëfficiënten $\hat{f}_k$, voor alle gehele getallen k .
- Hoe luidt de Fourierinversieformule voor deze functie $f(x)$?
- Laat m.b.v. de vorige onderdelen zien dat $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx)$ voor alle reële getallen x en bereken de coëfficiënten a_k expliciet.

OPGAVE 4

We bekijken de functie $g(t)$ op $\mathbb{R}$ die wordt gegeven door

$$g(t) = \sin(t) \quad \text{als} \quad |t| \leq \pi \quad \text{en} \quad g(t) = 0 \quad \text{als} \quad |t| > \pi.$$

We bekijken ook de continue functie $h(s)$ op $\mathbb{R}$, die voor $s \neq \pm 1$ wordt gegeven door $h(s) = \frac{\sin(\pi s)}{s^2 - 1}$. Je mag in deze opgave zonder bewijs gebruiken dat de functies $g(t)$ en $h(s)$ continu, stuksgewijs continu differentieerbaar en absoluut integreerbaar zijn.

- Bereken de Fouriergetransformeerde $\hat{g}(s)$ van de functie $g(t)$.
- Hoe luidt de Fourierinversieformule voor de functie $g(t)$?
- Bereken $h(1)$ en $h(-1)$.
- Bereken m.b.v. onderdeel b. de Fouriergetransformeerde $\hat{h}(t)$ van de functie $h(s)$.

EINDE