

Eerste deeltentamen Wiskunde 3 (SK-BWIS3)

2 maart 2015, 13:15-16:15 uur

- Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer.
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Bij dit tentamen mogen geen dictaat, boek, aantekeningen, uitwerkingen en grafische of andere geavanceerde rekenmachines worden gebruikt. Mobiele telefoons moeten worden uitgeschakeld en worden opgeborgen.

• Puntenverdeling:	Opgave	1a.	1b.	1c.	2a.	2b.	2c.	3a.	3b.	3c.	4a.	4b.	4c.	4d.
	Punten	9	7	9	11	7	7	7	10	8	6	6	6	7

OPGAVE 1

- a. Geef de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0. \quad (\triangle)$$

- b. Geef de oplossing $y_0(t)$ van de differentiaalvergelijking $(\triangle)$ die voldoet aan de beginvoorwaarden $y_0(0) = 1$ en $y'_0(0) = -2$.

- c. Geef een oplossing $v(t)$ van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$v''(t) + 4v'(t) + 5v(t) = \sin(t) + \sin(3t).$$

OPGAVE 2

In deze opgave werken we met de 2×2 -matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$.

- a. Bereken de eigenwaarden en de eigenvectoren van de matrix A
- b. Bekijk nu de differentiaal vergelijking (voor een vectorwaardige functie $F(t)$)

$$\frac{d}{dt}F(t) = A F(t) \quad (\diamond)$$

Geef de algemene oplossing van de differentiaal vergelijking $(\diamond)$.

- c. Geef de oplossing $F(t)$ van de differentiaal vergelijking $(\diamond)$ die ook voldoet aan de beginvoorwaarde $F(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Z.O.Z.

OPGAVE 3

We onderzoeken functies $u(x, t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$(\spadesuit) \quad u_t = u_{xx} + 2u_x + u \quad \text{voor } 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0.$$

- a. Eerst onderzoeken we oplossingen van $(\spadesuit)$ die te schrijven zijn als $u(x, t) = X(x)T(t)$ met $X(x)$ resp. $T(t)$ een twee maal differentieerbare functie van één variabele x resp. t .

Vertaal de partiële differentiaalvergelijking $(\spadesuit)$ in een paar gewone differentiaalvergelijkingen voor de functies $X(x)$ en $T(t)$.

- b. Geef alle functies $u(x, t)$ van de vorm $u(x, t) = X(x)T(t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking $(\spadesuit)$ en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{voor } t \geq 0.$$

- c. Geef een oplossing $u(x, t)$ van de partiële differentiaalvergelijking $(\spadesuit)$ die voldoet aan de begin- en randvoorwaarden

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 & \text{voor } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \sin(2x) & \text{voor } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Waarschuwing: De functie $u(x, t)$ in dit onderdeel heeft niet de bijzondere vorm $X(x)T(t)$.

OPGAVE 4

We werken in de driedimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$ met het standaard inproduct:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad \text{voor } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Neem het vlak M gegeven door

$$M = \{a\vec{v} + b\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{met } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- Laat zien dat M een lineaire deelruimte is van $\mathbb{R}^3$.
- Bereken de lengten van de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$.
- Laat zien dat de hoek tussen de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ gelijk is aan 45° (of -45°).
- Geef een vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ die loodrecht staat op zowel $\vec{v}$ als $\vec{w}$.

EINDE