

Tweede deeltentamen Wiskunde 3 (SK-BWIS3)

9 april 2015, 9:00-12:00 uur

- Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer.
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Bij dit tentamen mogen geen dictaat, boek, aantekeningen, uitwerkingen en (geavanceerde) rekenmachines worden gebruikt. Mobieltjes moeten worden uitgeschakeld en opgeborgen.

- Puntenverdeling:

1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	3e	3f
5	8	8	7	7	12	7	4	12	5	5	5	2	7	6

OPGAVE 1

In deze opgave bekijken we de 2π -periodieke functie $f(x)$ die wordt gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{als } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{als } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \text{ of } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

- Teken de grafiek van de functie $f(x)$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.
- Laat zien dat voor alle gehele getallen k de Fouriercoëfficiënt $\hat{f}_k$ wordt gegeven door

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(kx) dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(kx) dx$$

- Bereken de Fouriercoëfficiënten $\hat{f}_k$, voor alle gehele getallen k .
- Hoe luidt de Fourierinversieformule voor deze functie $f(x)$?
- Laat m.b.v. de vorige onderdelen zien dat $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx)$ voor alle reële getallen x en bereken de coëfficiënten a_k expliciet.

OPGAVE 2

We bekijken de functie $g(t)$ op $\mathbb{R}$ die wordt gegeven door

$$g(t) = \cos(t) \quad \text{als } |t| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad g(t) = 0 \quad \text{als } |t| > \frac{\pi}{2}.$$

We bekijken ook de continue functie $h(s)$ op $\mathbb{R}$, die voor $s \neq \pm 1$ wordt gegeven door $h(s) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}s)}{s^2 - 1}$.

Je mag in deze opgave zonder bewijs gebruiken dat de functies $g(t)$ en $h(s)$ continu, stuksgewijs continu differentieerbaar en absoluut integreerbaar zijn.

- Bereken de Fouriergetransformeerde $\hat{g}(s)$ van de functie $g(t)$.
Hint : Wat weet je van $e^{\frac{\pi}{2}in}$ als n een geheel getal is?
- Hoe luidt de Fourierinversieformule voor de functie $g(t)$?
- Bereken $h(1)$ en $h(-1)$.
- Bereken m.b.v. onderdeel b. de Fouriergetransformeerde $\hat{h}(t)$ van de functie $h(s)$.

Z.O.Z.

OPGAVE 3

- a. Geef de functie $v(t)$ die voldoet aan de homogene differentiaalvergelijking

$$v''(t) + 5v'(t) + 6v(t) = 0$$

en aan de beginvoorwaarden $v(0) = 0$ en $v'(0) = 1$.

- b. Bereken, voor een reëel getal $a < 0$, de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}(s)$ van de functie $f(t)$, die wordt gegeven door

$$f(t) = 0 \quad \text{als } t < 0, \quad f(t) = e^{at} \quad \text{als } t \geq 0.$$

- c. Bepaal de functie $g(t)$ waarvan de Fouriergetransformeerde $\widehat{g}(s)$ wordt gegeven door

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{-s^2 + 5is + 6}.$$

Hint: Gebruik onderdeel b..

- d. Wat is het verband tussen de functie $v(t)$ uit onderdeel a. en de functie $g(t)$ uit onderdeel c.?
- e. Neem nu de functie $u(t) = e^{-|t|}$ en de functie $g(t)$ uit onderdeel c.. Het convolutieproduct van deze twee functies is de functie $(g * u)(t)$ die wordt gedefinieerd door

$$(g * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) u(t - x) dx.$$

Laat zien dat

$$(g * u)(t) = a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t} + a_3 e^{-3t} \quad \text{voor alle reële getallen } t > 0,$$

$$(g * u)(t) = b e^t \quad \text{voor alle reële getallen } t < 0.$$

Bereken de coëfficiënten a_1, a_2, a_3, b expliciet.

- f. De functie $(g * u)(t)$ is dus voor alle reële getallen $t \neq 0$ tweemaal differentieerbaar .
Laat zien dat voor alle reële getallen $t \neq 0$ geldt

$$(g * u)''(t) + 5(g * u)'(t) + 6(g * u)(t) = e^{-|t|}. \quad (\star)$$

Opmerking: Als je de coëfficiënten a_1, a_2, a_3, b in onderdeel 3e. niet expliciet hebt kunnen uitrekenen, kun je ze alsnog berekenen m.b.v. de vergelijking $(\star)$.

EINDE